

**UNIVERSITÀ DEGLI STUDI  
DI MODENA E REGGIO EMILIA**

**Dottorato di ricerca in  
Ingegneria industriale e del territorio “Enzo Ferrari”**

Ciclo XXIX

Metodologie NVH per applicazioni automotive:  
valutazione delle prestazioni vibroacustiche attraverso  
l’analisi agli elementi finiti

Candidato: *Vincenzo Rotondella*

Relatore (Tutor): *Prof. Andrea Baldini*

Coordinatore del Corso di Dottorato: *Prof. Paolo Tartarini*



*“Ma quando guardate, guardate lontano,  
e anche quando credete di star guardando lontano,  
guardate ancor più lontano!”*

*Robert Baden-Powell*

## **Abstract**

L'attività di ricerca è stata svolta su tematiche NVH per applicazioni automotive e ha lo scopo di definire una metodologia di predizione e valutazione del rumore di rotolamento attraverso l'analisi agli elementi finiti. Tutti i veicoli sono soggetti a differenti forzanti dinamiche e la vibrazione e il rumore indotti determinano le prestazioni della vettura in termini di integrità strutturale, la percezione del confort e le performance di guida. Infatti le vibrazioni all'interno di un veicolo coinvolgono un range esteso di frequenze, da 1 Hz fino a circa 10 kHz. Un aspetto fondamentale da considerare è che la vibrazione indotta non solo dipende dall'intensità della eccitazione, ma anche dal comportamento della struttura che può amplificare tali effetti a causa delle risonanze strutturali e acustiche. In genere in una vettura, la trasmissione strutturale del rumore domina a basse frequenze (<400Hz) mentre la trasmissione aerea domina a frequenze più alte. Le linee di trasmissione dei carichi sono individuate dalle VTF e dalle NTF; tali funzioni di trasferimento di vibrazione e rumore sono strettamente legate alla struttura e alla cavità acustica.

Un'attività di correlazione modale su un sottotelaio posteriore in alluminio è stata svolta in modo da valutare differenti tecniche di modellazione delle connessioni. I test sperimentali e le analisi numeriche sono state comparate in maniera tale da validare la metodologia e la correlazione è stata raggiunta monitorando parametri dinamici come le frequenze proprie e le forme modali.

I modi di cavità acustica della vettura sono stati stimati analiticamente, misurati sperimentalmente e simulati numericamente in modo da valutare il comportamento acustico e le risonanze dell'abitacolo. La correlazione fra test e simulazione è stata valutata comparando le forme modali.

La riduzione del rumore interno e delle vibrazioni del veicolo può essere ottenuto introducendo patch di materiale smorzante sui pannelli. Modificando la rigidità e la massa della struttura applicando pannelli di materiale smorzante si possono modificare le frequenze naturali e la risposta dinamica del sistema. Un'attività di correlazione sul materiale smorzante è stata effettuata in maniera tale da identificare delle proprietà dei materiali affidabili. E' stata definita anche una metodologia che ha lo scopo di ridurre il numero di pannelli smorzanti sulla struttura. Valutando la partecipazione acustica di

ciascun pannello al rumore interno della vettura, è stato possibile classificare i singoli contributi. Questa analisi ha permesso di identificare le linee di trasmissione critiche e quindi di poter apporre i pannelli smorzanti solo dove realmente necessari per ridurre il rumore. E' stata anche proposta un'ottimizzazione strutturale allo scopo di aumentare l'efficienza della distribuzione dello smorzante.

Vale la pena sottolineare che la ricerca non tiene conto della simulazione delle forzanti strada trasmesse ai punti di attacco sospensione e dell'impatto degli allestimenti sulle funzioni di trasferimento. Questi aspetti sono stati approfonditi in una sezione dedicata poiché rappresentano dei requisiti imprescindibili per una simulazione di rumore interno vettura affidabile.

La metodologia di stima del rumore di rotolamento descritta nel lavoro di tesi permette di valutare preventivamente i contributi di rumore e vibrazioni, evidenziando i contenuti NVH critici della vettura all'interno del processo di sviluppo della vettura.

## **Abstract**

The research activity is focused on NVH (Noise, Vibration and Harshness) topics for automotive applications. The PhD thesis aims to the definition of a methodology for the prediction and evaluation of the rolling noise through FEA (Finite Element Analysis). In particular, vehicles are subject to several dynamic excitations and the induced vibration and noise have a number of effects on the vehicle and its passengers such as the integrity of the structure, the perception of comfort and the handling performance.

Moreover, the vibrations that occur in a vehicle involve a wide range of frequencies [from below 1 Hz up to about 10 kHz]. A fundamental aspect that has to be noted is that the effect does not only depend just on the nature and the intensity of the excitation, but also on the behavior of the structure that can amplify the effect due to structural and acoustic resonances. Generally in a vehicle, the structure-borne noise transmission path prevails at low frequency (<400 Hz) whereas the air-borne noise transmission path dominates above 500 Hz. The rolling noise depends on the transfer paths from the road to the ears of passengers through the suspension points. Transmission paths are assessed by VTFs (Vibration Transfer Functions) and NTFs (Noise Transfer Functions); these transfer functions are strictly related to the structure and to the cavity.

A modal correlation activity on an aluminum rear subframe has been performed in order to evaluate the influence of the different modeling techniques of connections. At first, a comparison between experimental test and FE analysis has been presented to validate the methodology. A good correlation was achieved by monitoring dynamic parameters such as natural frequencies and mode shapes.

Cavity modes were measured and numerically simulated in order to represent the acoustic behavior and resonances that occur in the passenger compartment. The correlation between test and simulation was performed and a comparison of mode shapes is illustrated.

The reduction of interior noise and vibration of vehicles can be obtained introducing patches of damping material on the panels. A correlation activity on damping materials was performed in order to identify reliable material properties. A specific FE analysis was performed to reduce the amount of damping pads on the chassis. Evaluating the acoustic participation of each panel to the interior noise, it was possible to rank the contributions.

This analysis allows to identify the critical transmission paths and to apply the damping patches only where it was useful to reduce the interior noise. A conclusive structural optimization was also proposed in order to increase the efficiency of the damping pads distribution.

It is worth pointing out that the research does not account for the simulation of the road forces transmitted to the suspension mounting points (road inputs) and for the impact of the trims on the transmission paths. These aspects are explained in a detailed section as they represent requirements for a reliable interior noise simulation.

The estimation of the rolling noise as further described in the thesis, allows to quickly evaluating the individual noise and vibration contributions to the occupants, bringing the NVH characteristics of the vehicle forward into the design process.

## **Indice**

<b>1. Introduzione.....</b>	<b>1</b>
<b>2. Noise, Vibration and Harshness .....</b>	<b>3</b>
2.1. La rumorosità all'interno di un veicolo.....	5
2.2. La riduzione del rumore nei veicoli .....	8
2.3. Il rumore di rotolamento in letteratura .....	11
<b>3. Correlazione numerico-sperimentale su base modale di un sottotelaio in alluminio.....</b>	<b>12</b>
3.1. Analisi Modale Sperimentale .....	13
3.2. Analisi Modale agli elementi finiti.....	19
3.2.1. Modellazione dei giunti saldati in letteratura .....	20
3.2.2. Descrizione del metodo ACM2 per la modellazione dei giunti saldati.....	26
3.2.3. Aggiornamento e allineamento del modello agli elementi finiti .....	27
3.3. Valutazione della correlazione e sviluppi futuri.....	29
<b>4. Correlazione numerico-sperimentale dei modi di cavità acustica di una vettura GT .....</b>	<b>35</b>
4.1. Modi di cavità acustica - Approccio Analitico.....	36
4.2. Modi di cavità acustica – Approccio Sperimentale.....	39
4.2.1. Teoria dell'analisi modale acustica .....	39
4.2.2. Test Sperimentale .....	40
4.3. Modi di cavità acustica – Approccio Numerico .....	43
4.4. Valutazione della correlazione e sviluppi futuri.....	47
<b>5. Valutazione del rumore di rotolamento di una vettura mediante analisi agli elementi finiti.....</b>	<b>49</b>
5.1. Transfer Path Analysis (TPA).....	49
5.2. Metodologia per la valutazione del rumore di rotolamento .....	54



5.2.1.	Vettura in configurazione Trimmed-Body (TB).....	55
5.2.2.	Cavità acustica e accoppiamento fluido-struttura.....	56
5.2.3.	Calcolo delle funzioni di trasferimento VTF e NTF .....	59
5.2.4.	Ricostruzione del Rumore di Rotolamento.....	62
5.3.	Ottimizzazione dello smorzante all'interno della vettura mediante HTPA .....	66
5.4.	Valutazione della metodologia e sviluppi futuri .....	69
<b>6.</b>	<b>Conclusioni.....</b>	<b>72</b>
	<b>Bibliografia.....</b>	<b>75</b>
	<b>Appendice A – Richiami di teoria.....</b>	<b>81</b>
A.1	Il Rumore.....	81
A.2	Le Vibrazioni.....	95

# 1. Introduzione

L'oggetto di questa tesi rientra all'interno di un progetto chiamato MilleChili, che rappresenta una collaborazione tra il Dipartimento di Ingegneria "Enzo Ferrari" dell'Università di Modena e Reggio Emilia e Ferrari S.p.A.

L'attività di ricerca è stata svolta su tematiche NVH per applicazioni automotive e ha lo scopo di definire una metodologia di predizione e valutazione del rumore di rotolamento attraverso l'analisi agli elementi finiti. La metodologia tradizionale per valutare il comportamento dinamico di un veicolo richiede di realizzare numerose prove sperimentali su versioni prototipali del componente e di dimostrare la piena capacità di soddisfare le specifiche richieste. Il componente è quindi soggetto a numerosi cicli di redesign che, in seguito ad una valutazione sperimentale, porteranno ad un prototipo "in prestazione". Durante tali fasi di redesign buona parte di tempo e risorse vengono spesi nel realizzare prototipo e test sperimentali. L'ausilio dell'analisi agli elementi finiti risulta essere determinante in questa fase poiché essa si affianca e spesso si sostituisce ai test sperimentali dal momento che risulta essere molto rapida e generalmente più economica. Inoltre l'analisi agli elementi finiti permette di simulare situazioni in cui il test sperimentale risulta essere molto difficoltoso se non impossibile. I risultati di tali analisi numeriche risultano essere fortemente dipendenti dall'accuratezza con la quale i modelli agli elementi finiti rappresentano il comportamento "reale" di una vettura. La validazione dei modelli agli elementi finiti e la loro capacità di predire il comportamento vibro-acustico delle strutture risultano essere dei target fondamentali per l'applicazione industriale, e in particolar modo per il campo automotive e aerospaziale.

La struttura del presente elaborato è articolata in 6 capitoli. Nel primo capitolo si ha la parte introduttiva, al quale segue una panoramica sulla tematica NVH per una migliore comprensione dell'elaborato. Nel Cap. 3 viene presentata un'attività di correlazione numerico-sperimentale dei modi propri di un sottotelaio in alluminio; nel Cap.4 viene presentata un'attività di correlazione numerico-sperimentale dei modi acustici di cavità di una vettura GT. I capitoli 3 e 4 sono dedicati alla tematica della correlazione numerico-sperimentale, che risulta essere un prerequisito per simulazioni affidabili. Nel Cap.5 viene presentata metodologia di predizione e valutazione del rumore di rotolamento attraverso

l'analisi agli elementi finiti. Tale metodologia rappresenta un'estensione della classica Transfer Path Analysis (TPA) e si avvale dell'ausilio di simulazioni agli elementi finiti nella definizione dei singoli *transfer path* e quindi della ricostruzione del rumore di rotolamento. Il Cap. 6 racchiude le conclusioni dell'attività di ricerca.

## 2. Noise, Vibration and Harshness

Lo studio e la modifica delle caratteristiche vibro-acustiche di un veicolo prende il nome di NVH (Noise, Vibration and Harshness), che è la combinazione di tre parametri:

- *Noise*: il livello di rumorosità di una vettura durante la marcia
- *Vibration*: le vibrazioni percepite dal guidatore
- *Harshness*: la ruvidità dell'andamento del veicolo

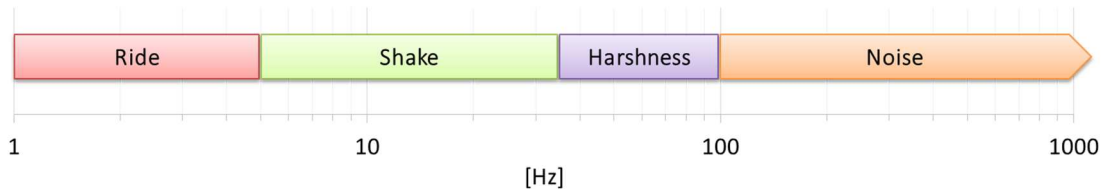
Durante le diverse condizioni di guida, tutti i veicoli sono soggetti a diverse forzanti dinamiche [1-2]; la vibrazione e il rumore indotti da tali sollecitazioni influenzano principalmente le prestazioni di comfort e di guida di una vettura, ma possono anche ridurre la sicurezza e l'affidabilità del veicolo stesso. Sebbene sia possibile misurare tali proprietà, per alcuni aspetti è necessaria una valutazione soggettiva del comportamento del veicolo o ci si avvale di strumenti analitici che forniscono risultati in linea con le impressioni soggettive del guidatore. Tali aspetti fanno parte di quella che è definita "psico-acustica", che rappresenta lo studio della percezione del suono.

Le vibrazioni all'interno di un veicolo coinvolgono un range esteso di frequenze, da 1 Hz per le manovre del veicolo fino a circa 10 kHz per eccitazioni acustiche. Un aspetto fondamentale da considerare è che la vibrazione indotta non solo dipende dall'intensità della eccitazione, ma anche dal comportamento della struttura che può amplificare tali effetti a causa delle risonanze strutturali e acustiche.

Come indicato da Morello in [2], i fenomeni vibro-acustici possono essere classificati in base alla frequenza alla quale avvengono. Riferendosi alla Figura 2.1, si possono definire le seguenti bande di frequenza per classificare i fenomeni vibrazionali:

- *Ride* (0 ÷ 5 Hz): include le accelerazioni a bassa frequenza dovute alle manovre del veicolo e alle oscillazioni di corpo rigido della scocca sulle sospensioni
- *Shake* (5 ÷ 25 Hz): include le prime risonanze dei sottosistemi principali connessi al telaio del veicolo, come ad esempio il motore e le sospensioni.
- *Harshness* (25 ÷ 100 Hz): include le risonanze di telaio come corpo flessibile. Questo range di frequenza rappresenta una parziale sovrapposizione di frequenze percepite come vibrazione con il rumore. Vibrazioni ad alta intensità acustica sono spesso percepite dall'orecchio come variazioni di pressione e ci riferisce ad esse come "boom".

- *Noise* (>100 Hz): la vibrazione è percepita dalle orecchie come rumore. La vibrazione pura è notevolmente attenuata e può essere lievemente avvertita mediante il contatto (ad es. sul volante). Quindi ci si riferisce alla banda di frequenze superiore ai 100 Hz come rumore.



**Fig. 2.1** Bande di frequenza per classificare i fenomeni vibratorii

In base al meccanismo di propagazione del rumore, è possibile definire due differenti tipi di vie di trasmissione:

- **Structure-borne:** i vari sottosistemi del veicolo trasmettono le forzanti dinamiche al telaio direttamente mediante le connessioni e le interfacce strutturali. Ciò determina vibrazioni nella struttura e nei pannelli del telaio. Le vibrazioni strutturali sono trasmesse per via aerea nella cavità abitacolo che circonda gli occupanti vettura causando il cosiddetto “*interior noise*”.
- **Air-borne:** Le onde di pressione che si propagano all'esterno del veicolo inducono vibrazioni nei pannelli o vetri della vettura e determinano onde di pressione all'interno del veicolo, generando quindi rumore.

In tutti i casi la trasmissione del rumore avviene nella cavità acustica che rappresenta l'aria che circonda gli occupanti del veicolo. La differenza quindi tra rumore strutturale o aereo è rappresentata quindi dalla via di trasmissione tra la sorgente e i pannelli che circondano la cavità all'interno della vettura. Generalmente in una vettura, la trasmissione strutturale del rumore può essere considerata dominante a basse frequenze (<500Hz) mentre la trasmissione aerea risulta essere preponderante a frequenze più alte, superiori a 1000 Hz. Il rumore strutturale viene attenuato mediante l'*isolamento*, mentre il rumore aereo è ridotto mediante l'*assorbimento* [3-4]. Le vibrazioni sono invece avvertite dal guidatore all'interfaccia con il veicolo, come ad es. sul volante, sul sedile, sul pavimento e ai pedali.

## 2.1. La rumorosità all'interno di un veicolo

Le principali sorgenti di rumore e di vibrazione nei veicoli per autotrazione, e che contribuiscono in modo determinante al livello di rumore e di comfort percepito dai passeggeri all'interno del veicolo, sono principalmente legate a due fattori: al gruppo propulsore che genera il moto del veicolo (*powertrain noise*) e al moto del veicolo su strada (*rolling noise*). Volendo entrare maggiormente nel dettaglio, è possibile affermare che il livello di rumore percepito dai passeggeri nell'abitacolo e legato al powertrain è una combinazione di: rumore proveniente dal motore (*engine noise*); rumore legato ai sistemi di aspirazione (*intake noise*) e scarico (*exhaust noise*); rumore legato al sistema di raffreddamento (*cooling system noise*); rumore legato al cambio (*gearbox noise*) e rumore legato alla trasmissione (*transmission noise*). Mentre il livello di rumore legato al moto del veicolo su strada (il cosiddetto rumore da rotolamento) ha due componenti principali: il rumore legato all'interazione tra pneumatico e pavimentazione stradale (*road noise*) e il rumore aerodinamico causato dal flusso d'aria intorno al veicolo (*aerodynamic noise*). Altri rumori presenti all'interno di un autoveicolo sono legati al sistema frenante (*brake noise*), mentre altri ancora vengono classificati come cigolii, stridii e ticchettii (Figura 2.2).

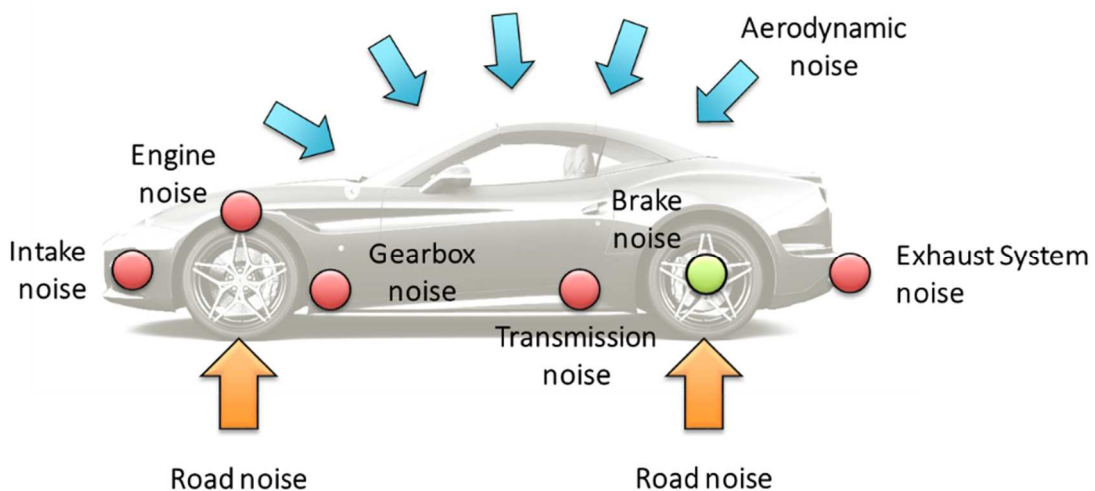
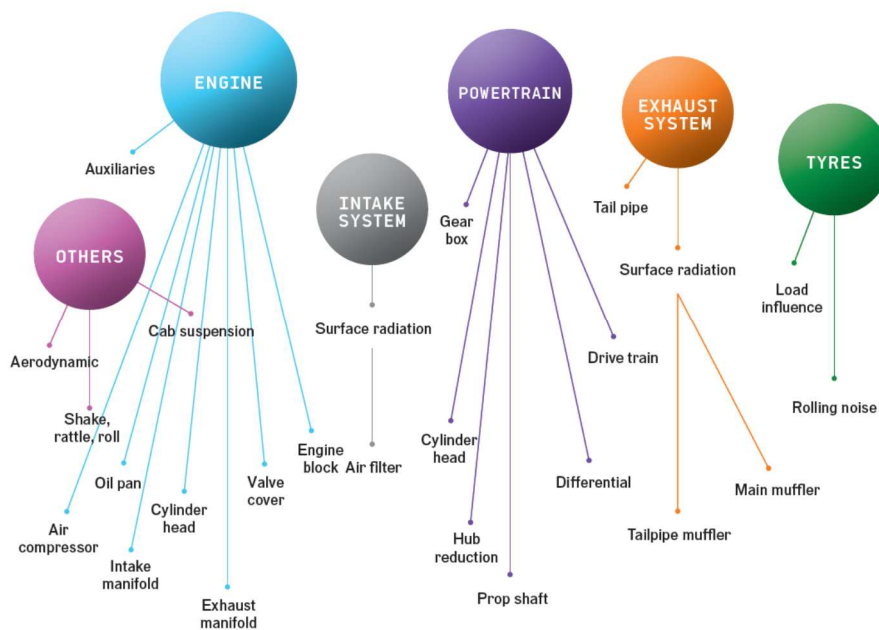
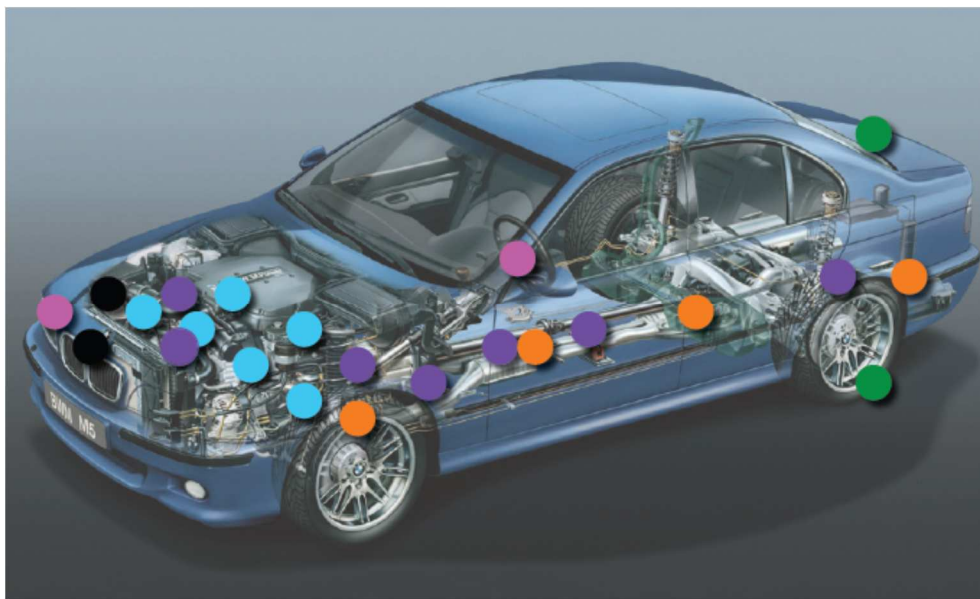


Fig. 2.2 Principali sorgenti di rumore e vibrazione in un veicolo

Generalmente il rumore prodotto esternamente da un veicolo nuovo, in condizioni di normale funzionamento, è dominato dal rumore legato al moto del veicolo su strada (*rumore di rotolamento*), che diventa sempre più importante all'aumentare della velocità

di crociera del veicolo, superando il livello di potenza sonora legato al powertrain. Se si considera, ad esempio, un'auto ad una velocità di crociera inferiore ai 20 km/h, il rumore di rotolamento ha un effetto trascurabile sul livello di rumore complessivo prodotto dal veicolo, ma a velocità superiori ai 60 km/h tale componente diventa la sorgente di rumore dominante. A velocità superiori ai 130 km/h, la rumorosità del veicolo è, in particolare, dominata dal rumore aerodinamico. Nella Figura 2.3 sono evidenziate le possibili sorgenti di rumore presenti in un autoveicolo.



**Fig. 2.3** Classificazione delle diverse principali sorgenti di rumore e vibrazione in base al sottosistema di riferimento

Generalmente il rumore e le vibrazioni percepiti dai passeggeri nel comparto auto hanno origine all'esterno dell'abitacolo e, prima di giungere all'interno dell'abitacolo, possono interagire in qualche modo con la struttura stessa del veicolo e, in alcuni casi, anche con le altre sorgenti di rumore. Quando il rumore giunge l'interno mediante percorsi aerei si parla di *air-borne noise*, se invece il rumore giunge all'interno del compartimento interagendo con la struttura del veicolo si parla di *structure-borne noise*. La maggior parte del rumore a bassa frequenza viene trasmesso per via strutturale, mentre il rumore ad alta frequenza viene trasmesso per via aerea.

I percorsi strutturali del suono sono caratterizzati da connessioni dirette della struttura con i pannelli sulla superficie della cabina passeggeri, dove l'energia viene irradiata nello spazio acustico interno come rumore. I percorsi aerei, invece, si riferiscono ai casi in cui il suono generato al di fuori della cabina passeggeri viene trasmesso attraverso i pannelli del veicolo all'interno dell'abitacolo.

A bassa frequenza il *road noise* è un classico esempio di rumore che si trasmette per via strutturale: l'interazione tra il pneumatico e la pavimentazione stradale è la fonte delle vibrazioni che, trasmesse attraverso vari percorsi costituiti da combinazioni di componenti di sospensioni, telaio e pannelli della carrozzeria, giungono all'interno dell'abitacolo del veicolo. Le vie di trasmissione strutturale sono anche responsabili delle componenti del rumore a bassa frequenza prodotte dal motore quali il *boom noise* (per frequenze inferiori ai 100 Hz) e il *moan noise* (per frequenze dai 100 ai 200 Hz): le sollecitazioni prodotte dal motore vengono trasmesse attraverso i supporti del motore al telaio del veicolo, e da quest'ultimo all'interno del comparto auto.

Il *road noise* alle alte frequenze è, invece, un esempio di rumore che si trasmette per via aerea: il rumore generato dalle ruote si propaga sia sotto il veicolo, da dove viene poi trasmesso mediante percorsi aerei ai pannelli che costituiscono il pavimento del veicolo, sia tutto intorno al veicolo, da dove viene poi trasmesso ai finestrini e ai pannelli che costituiscono l'abitacolo occupato dai passeggeri.

Anche il rumore prodotto dal powertrain viene trasmesso alla cabina dei passeggeri sia mediante percorsi aerei che strutturali: in particolare, l'energia sonora generata dalla vibrazione delle superfici delle componenti del powertrain e dai carichi aerodinamici all'interno dei suoi componenti è irradiata nell'abitacolo attraverso l'aria (*air-borne noise*), mentre le forze meccaniche e le vibrazioni indotte dalle componenti vengono



trasmesse attraverso i punti di attacco alla struttura del veicolo e da questa, mediante percorsi strutturali, alla cabina (*structure-borne noise*).

## **2.2. La riduzione del rumore nei veicoli**

Il rumore e le vibrazioni sono fattori importanti per il comfort sia del guidatore che dei passeggeri di un autoveicolo [4]. L'energia viene trasmessa dalla sorgente stessa all'interno del veicolo attraverso percorsi che interessano o il mezzo (l'aria) oppure la struttura stessa del veicolo. La quantità di energia che raggiungere gli occupanti varia da veicolo a veicolo, e dipende principalmente dalla natura della sorgente e dall'efficacia del percorso seguito, essendo essa funzione delle condizioni operative del veicolo e dal campo di frequenze di interesse.

Le strategie adottate per la riduzione del rumore negli autoveicoli includono un'ampia scelta di soluzioni a seconda della sorgente di rumore su cui si vuole (o si deve) intervenire, il modo in cui il rumore si trasmette all'interno dell'abitacolo e il tipo di applicazione. In linea generale è possibile affermare che le misure necessarie per ridurre il rumore all'interno di un veicolo riguardano principalmente: il trattamento delle sorgenti di rumore, la riduzione della trasmissione del rumore, l'assorbimento del rumore all'interno della cavità dei passeggeri.

La riduzione del rumore, pertanto, inizia dalla sorgente stessa che l'ha originato. I fornitori di componenti per autoveicoli (come motori, pneumatici, turbocompressori, ecc.) si occupano essi stessi delle specifiche di rumore, e cercano di realizzare prodotti sempre più silenziosi, mantenendo inalterate o talvolta migliorando le prestazioni e il prezzo del componente stesso. I costruttori di autoveicoli, invece, controllano il rumore intervenendo sui percorsi che il rumore fa per giungere all'interno dell'abitacolo. La riduzione del rumore per via aerea è generalmente ottenuta garantendo la chiusura delle aperture (ad esempio, mediante delle opportune guarnizioni), aggiungendo massa ai pannelli della struttura e ai finestrini, e introducendo all'interno del comparto auto dei materiali con particolari proprietà fonoassorbenti. La riduzione del rumore per via strutturale, invece, viene ottenuta ottimizzando i sistemi di supporto (ad esempio, ricorrendo all'uso di isolatori) e migliorando le caratteristiche di smorzamento della struttura.

Gran parte del rumore che si trasmette per via aerea nelle autovetture si verifica nella parte anteriore del veicolo: qui il rumore di rotolamento, il rumore generato dal motore e dai sistemi di aspirazione e scarico e il rumore del vento vengono trasmessi all'interno dell'abitacolo attraverso la plancia, i pannelli del pavimento anteriore e il parabrezza.

La tecnica classica per ridurre il rumore che si trasmette nel vano passeggeri è quella di aggiungere materiale isolante alle superfici in lamiera della struttura per incrementare la perdita di energia connessa al rumore. Recentemente, tecniche di riduzione di questo tipo sono state ottenute con peso estremamente contenuto, disaccoppiando i diversi strati che costituiscono il cruscotto e aumentando in maniera significativa l'assorbimento acustico interno.

Un'altra importante strategia per minimizzare il rumore che giunge dal comparto del motore all'interno dell'abitacolo, è quella di ridurre il numero di punti di penetrazione o di migliorare la tenuta: si tratta di punti in cui i sistemi presenti nel vano motore sono collegati attraverso il cruscotto a sistemi presenti nell'abitacolo, come ad esempio il piantone dello sterzo, la leva del cambio, la pedaliera, il sistema di condizionamento dell'aria, ecc.

Per ridurre il rumore che raggiunge gli occupanti di un veicolo, sia esso trasmesso per via aerea o per via strutturale, le strategie più frequentemente utilizzate sono:

- aumentare lo smorzamento strutturale;
- migliorare la perdita di trasmissione (*Transmission Loss*) attraverso i pannelli della scocca e i vetri;
- ricorrere all'uso di materiali fonoassorbenti nel comparto motore, nel comparto passeggeri e nel vano portabagagli;
- isolare dalle vibrazioni i componenti meccanici.

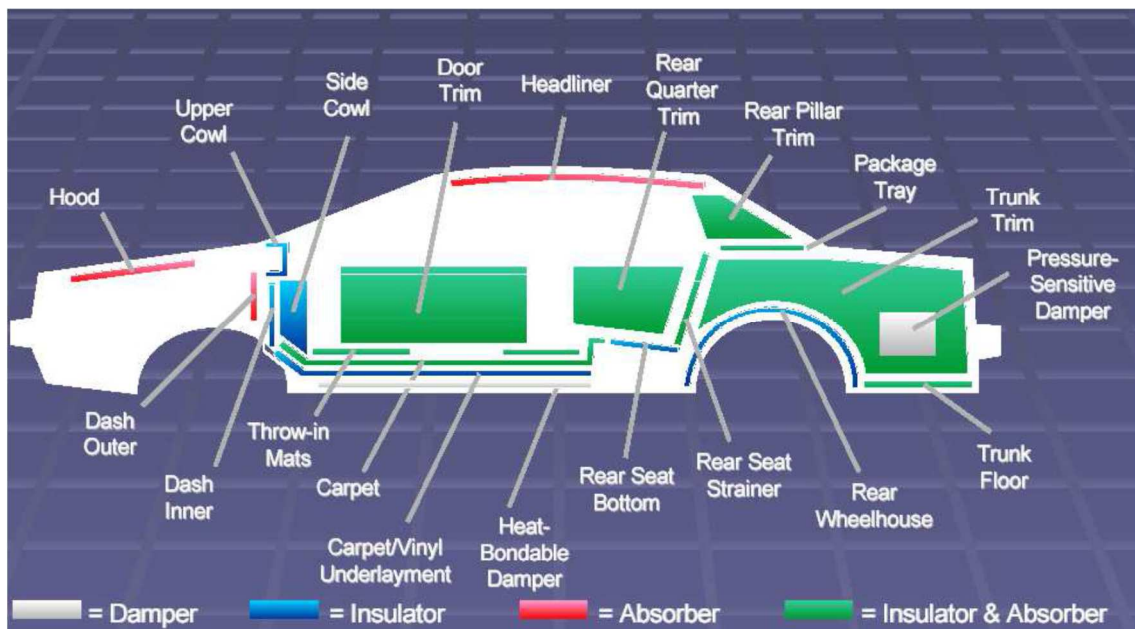
In letteratura [3-4-5] viene ampiamente descritto come tutte e quattro queste tecniche sono utilizzate nel settore automobilistico per ridurre il rumore e le vibrazioni nei veicoli, e come miglioramenti all'interno del vano passeggeri possono essere ottenuti incrementando lo smorzamento (ricorrendo a trattamenti smorzanti).

L'uso di materiale smorzante è generalmente utilizzato per ridurre le vibrazioni e il rumore che si trasmettono per via strutturale, nel campo di frequenze tra i 100 e i 500 Hz, piuttosto che a ridurre il rumore trasmesso per via aerea.

Nel settore automobilistico i materiali usati per racchiudere una sorgente di rumore (come ad esempio il motore) oppure per isolare la cabina dei passeggeri vengono normalmente chiamati materiali barriera (*barrier materials*). Solitamente materiali di questo tipo vengono utilizzati per ridurre il rumore che raggiunge la cabina dei passeggeri per via aerea, quali il rumore generato dal motore, dal sistema di scarico, dalle ventole, dai pneumatici e dal vento.

Quando il suono raggiunge l'abitacolo, può essere efficacemente assorbito mediante l'uso di materiali con particolari proprietà acustiche (*porous materials*) [6]. Questi materiali acustici sono in genere progettati non solo per l'isolamento dal rumore, ma per l'assorbimento e lo smorzamento delle vibrazioni. Tali materiali funzionano al meglio quando il loro spessore è pari ad un quarto della lunghezza d'onda del suono da assorbire. Il trattamento acustico delle superfici interne dell'abitacolo gioca un ruolo significativo nella riduzione del rumore percepito dagli occupanti. In un comparto auto sono, infatti, presenti diverse superfici su cui è possibile applicare trattamenti per l'assorbimento e la riduzione del rumore.

La Figura 2.4 mostra le zone all'interno di una comune autovettura in cui di solito vengono applicati i materiali smorzanti, isolanti e i materiali fonoassorbenti.



**Fig. 2.4** Zone in cui vengono applicati trattamenti in modo da ridurre il rumore all'interno della vettura

### **2.3. Il rumore di rotolamento in letteratura**

Wilson e Huber [7] hanno approfondito la tematica del rumore di rotolamento investigando le differenti sorgenti di rumore presenti in una vettura ed hanno proposto una procedura per ridurre il road noise mediante un design strutturale dedicato a tale missione. La riduzione del rumore di un veicolo risulta essere un tema centrale nell'ambito automotive poiché influenza il comfort degli occupanti della vettura. Il rumore dovuto all'interazione tra strada e pneumatico risulta essere il contributo principale di rumore durante i tragitti a velocità costante [8-9]. Naoko Yorozu [10] ha identificato la possibilità di ridurre la rumorosità a frequenze medio-alte concentrandosi sulle proprietà di assorbimento dei materiali per applicazioni acustiche. Ichiro Kido ha analizzato le vibrazioni dovute all'accoppiamento tra le sospensioni e il sistema pneumatico-ruota [11]. Waisanen [12] ha utilizzato l'Helium per "eliminare" le sorgenti di eccitazione alle frequenze di risonanza della cavità pneumatica.

Molti metodi per la riduzione del rumore di rotolamento sono basati sulla Transfer Path Analysis (TPA). Yu [13] ha indagato l'influenza dell'interazione strada-pneumatico e ha individuato le linee di trasferimento dei carichi mediante TPA dalle sospensioni al telaio della vettura. L'indagine sul rumore di rotolamento spesso si concentra sul rumore structure-borne, come indicato in [14-15-16-17]. Dubbaka descrive come i target NVH di un sistema vettura possono essere ridotti a target di sottosistemi utilizzando la tecnica della Transfer Path Analysis (TPA). Koners [15] presenta la possibilità di stimare l'interior noise stimando il rumore irradiato da specifici pannelli che circondano la cavità utilizzando il metodo della TPA. Gehringer [16] descrive una metodologia che permette di combinare i dati sperimentali e la simulazione numerica per identificare le linee di trasmissione principali e ridurre il rumore interno abitacolo. Surkutwar [19] descrive come poter effettuare una TPA completa utilizzando le funzioni di trasferimento generate da una simulazione agli elementi finiti. Bartolozzi e Danti [19-20] hanno proposto una metodologia per la modellazione di un pneumatico da utilizzare per le simulazioni full-vehicle in maniera tale da stimare le forze dinamiche che eccitano il telaio della vettura durante la marcia per strada.

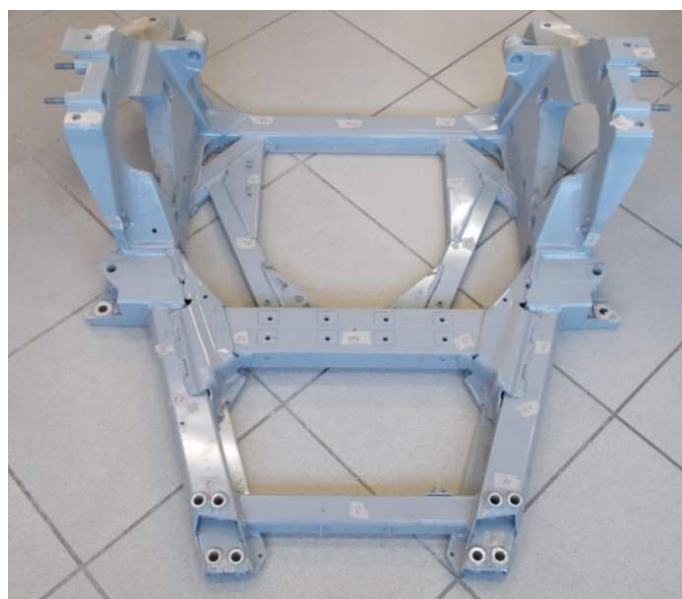
In letteratura si sottolinea l'importanza della metodologia TPA per affrontare le problematiche NVH. Tale metodologia verrà indagata nel dettaglio nei capitoli successivi.

### 3. Correlazione numerico-sperimentale su base modale di un sottotelaio in alluminio

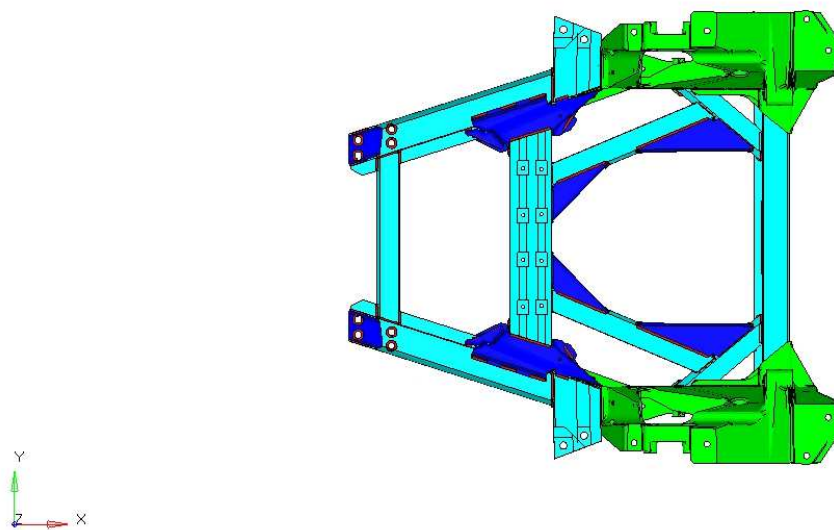
L'utilizzo di modelli agli elementi finiti per descrivere il comportamento dinamico di una struttura è diventata una tematica di notevole importanza nell'industria automotive. Negli anni '90, Baker [21], Imregun [22], e Friswell [23] hanno realizzato una review completa di differenti metodi di correlazione e validazione del comportamento dinamico delle strutture. In letteratura sono presenti numerosi lavori [24-25-26-27-28-29-30] che confermano l'importanza di una buona correlazione su base modale come validazione dei modelli FEM, da utilizzare per successive analisi dinamiche.

In questo capitolo verrà presentato un confronto numerico-sperimentale tra un'analisi modale sperimentale e un'analisi modale mediante l'analisi agli elementi finiti su un sottotelaio posteriore in alluminio di una vettura GT.

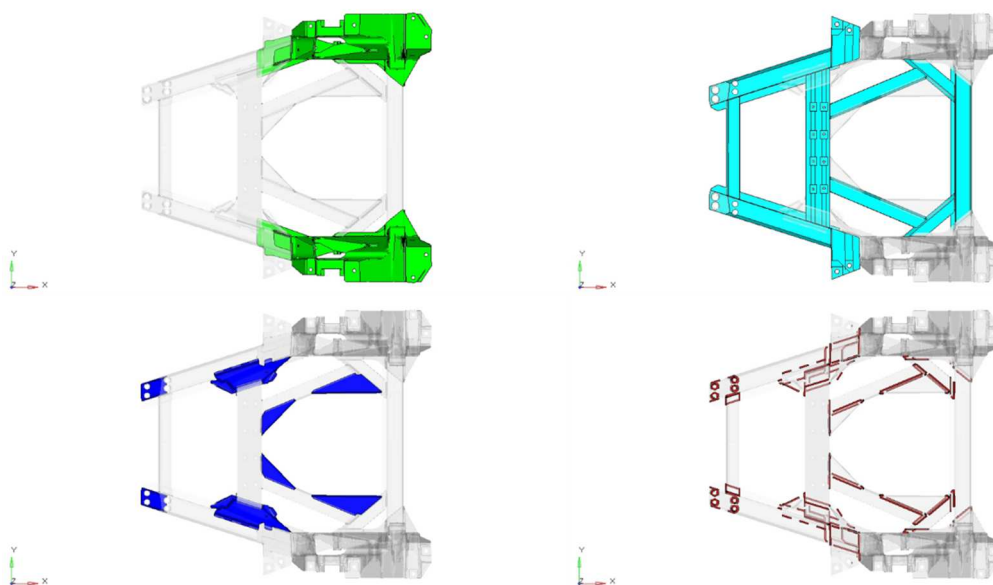
La struttura analizzata è un sottotelaio posteriore in alluminio; tale componente prototipale risulta essere realizzato da 11 estrusi, 2 componenti realizzati in fusione e lamiere e fazzoletti di rinforzo strutturale, come mostrato nella figura 3.1. Tali componenti sono collegati mediante saldatura continua MIG. Nelle figure 3.2 e 3.3 sono indicati i componenti suddivisi per gruppi. Il peso totale del sottocomponente è pari a 23.5 kg.



**Fig. 3.1** Sottotelaio posteriore in alluminio



**Fig. 3.2** Sottotelaio posteriore in alluminio: Fusioni (in verde), Estrusi (in ciano), Lamiere (in blu), Saldatura (in rosso)



**Fig. 3.3** Sottotelaio posteriore in alluminio: Fusioni (in verde), Estrusi (in ciano), Lamiere (in blu), Saldatura (in rosso)

### 3.1. Analisi Modale Sperimentale

I modi propri di vibrare sono caratteristiche intrinseche di una struttura [31]. I modi e le risonanze sono definite dalle proprietà fisiche della struttura (massa, rigidità e smorzamento) e dalle condizioni al contorno del componente (es. condizioni di vincolamento, connessioni, ...). Le proprietà cosiddette “modali” di una struttura sono le

frequenze naturali, lo smorzamento modale e le forme modali. Un test modale che permette di individuare tali parametri può essere riassunto in 4 fasi differenti:

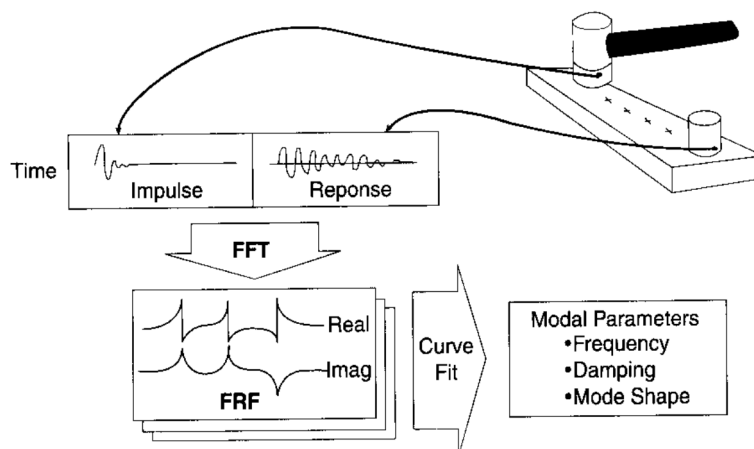
- Pianificazione del Test
- Misura delle FRF
- Curve Fitting
- Estrazione dei parametri modali

Una metodologia semplice ed efficace per valutare i modi propri di una struttura è l'*impact testing*. Tale metodologia è stata sviluppata negli anni '70 ed è diventata la più diffusa forma per valutare le proprietà modali di una struttura. Questo tipo di test ha il vantaggio che le risposte misurate possono essere legate direttamente alla unica forza di eccitazione e quindi le FRF possono essere ricavate direttamente. Questa configurazione, però, necessita di un quantitativo di energia non sempre facile da provvedere, soprattutto per strutture di certe dimensioni; il rischio è quindi quello di impiegare eccitazioni che non sono in realtà rappresentative delle reali condizioni operative.

Gli strumenti necessari per realizzare un impact test sono:

- Martelletto strumentato
- Accelerometri
- FFT Analyzer
- Un software di postprocessamento modale

La figura 3.4, estratta da [31], descrive in breve l'intero processo di analisi modale sperimentale effettuata mediante impact test.



**Fig. 3.4** Impact test

La stima dei parametri modali è ottenuta da un set di misure di FRF. La funzione di risposta in frequenza, come descritto in [31], descrive le relazioni input-output tra due punti di una struttura in funzione della frequenza. La formulazione generale di una funzione di risposta in frequenza è la seguente:

$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} \quad (3.1)$$

dove:

- $H(\omega)$  è la funzione di risposta in frequenza
- $Y(\omega)$  è l'output del sistema nel dominio della frequenza
- $X(\omega)$  è l'input del sistema nel dominio della frequenza

Subito dopo l'acquisizione e il processamento dei dati si devono interpretare le risposte in frequenza. I dati misurati sono soggetti a un processo che cerca di determinare i parametri specifici di un modello matematico in modo che questo particolare modello esibisca lo stesso comportamento dinamico di quello misurato nei test. Il modello in questione è solitamente un modello modale e la fase di analisi consiste nel determinare le proprietà modali del sistema che descrivono più dettagliatamente il comportamento dinamico osservato nei test. Questa analisi è spesso condotta usando tecniche di *curve-fitting* in cui i coefficienti di una specificata funzione polinomiale sono stabiliti cercando di minimizzare la differenza tra le curve misurate e le curve rigenerate usando l'espressione polinomiale

Ci sono molti algoritmi per il *curve-fitting*: una loro classificazione basilare può riguardare la scelta di una procedura di analisi influenzata o meno dalla qualità delle curve FRF disponibili. I metodi di analisi più importanti sono quelli che eseguono il *fitting* su tutte le curve in un solo passo e che abbracciano un range di frequenza relativamente ampio. Mentre gli algoritmi numerici per un approccio di questo tipo sono ormai ben definiti, le loro prestazioni sui tipi di dati ottenuti da un tipico test modale dipendono fortemente dalla qualità di questi ultimi. In particolare tali metodi richiedono un livello di consistenza e uniformità su tutto il set di dati usati che è difficile raggiungere in un test modale convenzionale.



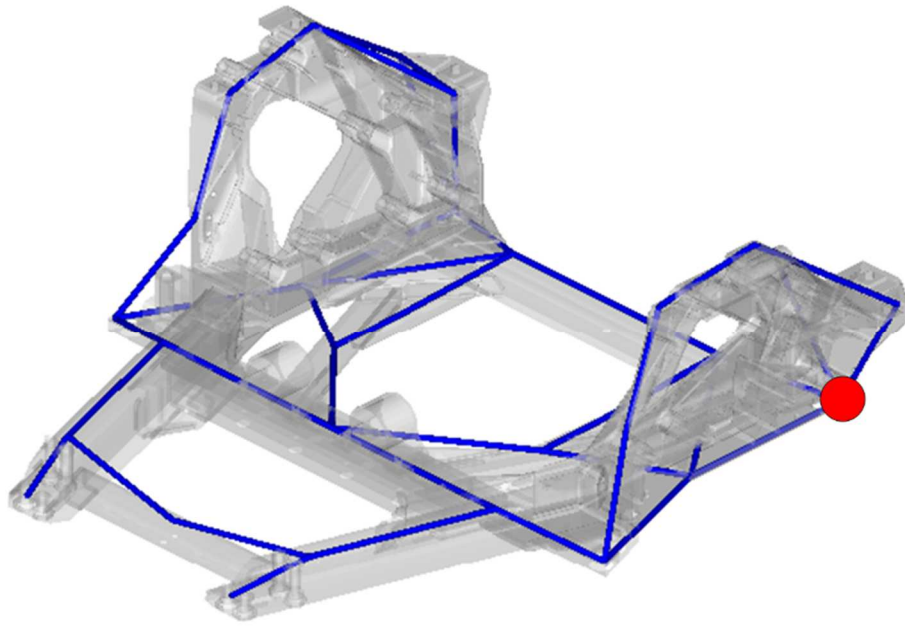
La campagna di test sperimentali è stata condotta con la collaborazione del team NVH Veicolo di Ferrari S.p.A.

La struttura è stata sospesa per mezzo di quattro elastici in maniera da simulare una condizione free-free; tale condizione prevede che la struttura non sia collegata a terra ma sia effettivamente sospesa nello spazio. In tale condizione la struttura mostrerà i modi di corpo rigido, che sono legati alle proprietà di massa e di inerzia della stessa. In una fase di pretest si è valutato che il sistema di sospensione della struttura non interferisse con i modi propri di vibrare. Il sistema di sospensione mediante elastici è mostrato in figura 3.5



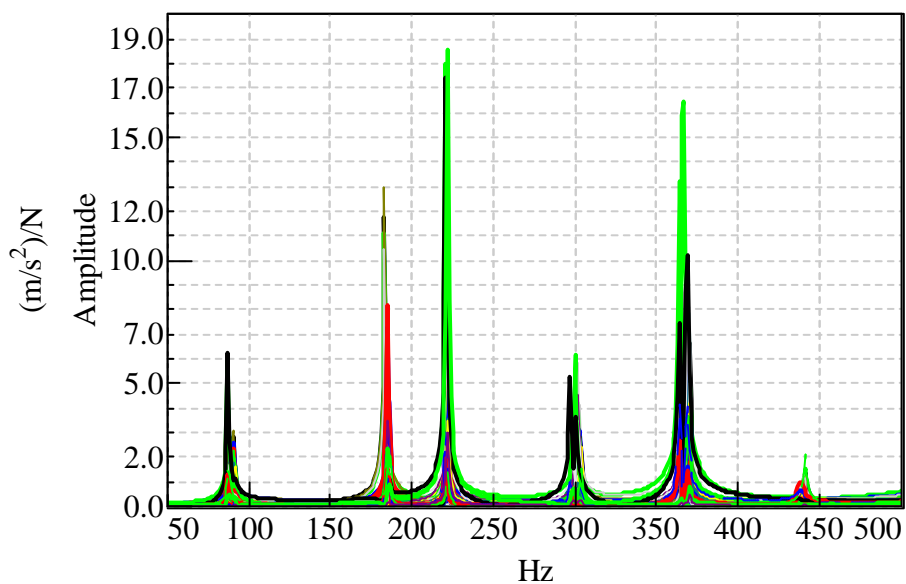
**Fig. 3.5** Sottotelaio sospeso mediante elastici

Durante il test, la struttura è stata eccitata in direzione Z in un unico punto di impatto, nella parte inferiore del componente in fusione a sinistra. Le risposte sono state misurate in 35 posizioni, utilizzando degli accelerometri triassiali. La geometria (o wireframe) del set-up sperimentale è mostrata nella figura 3.6, dove il punto rosso rappresenta la posizione dell'impact point. Il software utilizzato durante la campagna sperimentale sia per l'acquisizione sia per il postprocessing dei dati è LMS Test.Lab.



**Fig. 3.6** Geometria del test modale sul sottotelaio

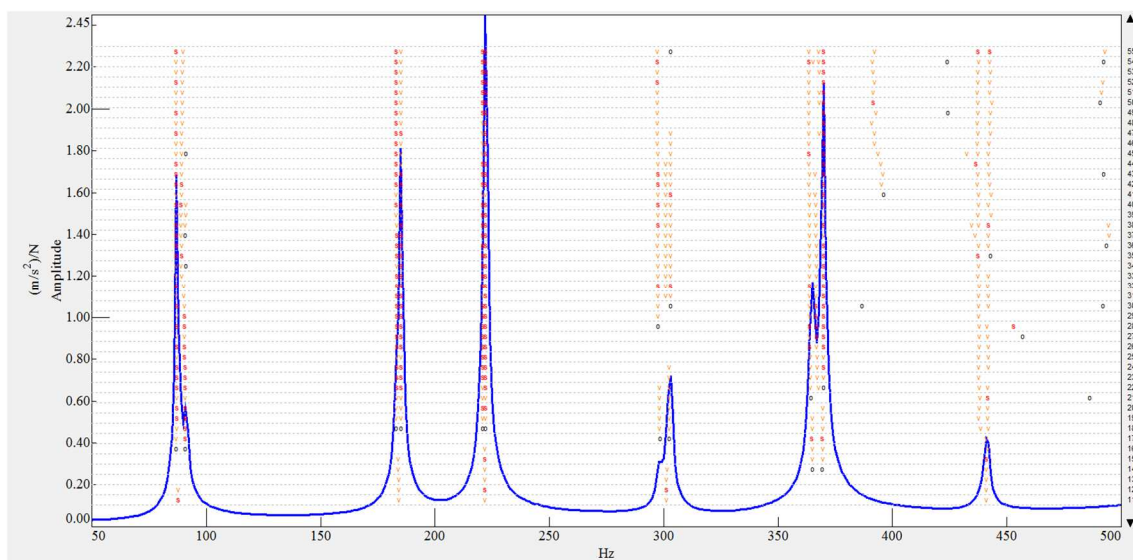
Le tecniche di stima dei parametri modali sono basate sull'estrazione delle frequenze proprie, dello smorzamento e delle forme modali a partire dai dati sperimentali che sono processati in forma di risposta in frequenza. La figura 3.7 mostra le FRF acquisite sulla struttura in esame durante l'impact test. Le FRF considerate sono chiamate "inertanze" poiché misurano la risposta accelerometrica della struttura in un determinato punto di output a seguito di una forzante unitaria in un punto di input. Le FRF o inertanze sono definite come  $a/F$  che dimensionalmente equivale a  $(m^2/s)/N$ .



**Fig. 3.7** Plot delle FRF acquisite durante il test sperimentale

L'estrazione delle frequenze proprie è stata effettuata mediante il metodo PolyMAX [32], implementato nel software LMS Test.Lab. L'analisi e processamento dei dati è stato effettuato dal team di NVH Veicolo di Ferrari S.p.A.

La figura 3.8 mostra il diagramma di stabilizzazione impiegato per determinare i parametri modali utilizzando l'algoritmo PolyMAX. La tabella 3.1 elenca le frequenze proprie estratte, da 50 Hz fino a 500 Hz.



**Fig. 3.8** Diagramma di stabilizzazione per il metodo PolyMAX; la curva blu rappresenta la somma delle FRF

Mode	Frequency [Hz]	Damping Ratio (%)
1	87.144	0.20
2	90.818	0.35
3	185.216	0.04
4	222.299	0.08
5	297.525	0.08
6	303.071	0.03
7	364.932	0.09
8	369.877	0.07
9	441.061	0.13

**Tab. 3.1** Modi propri sperimentali

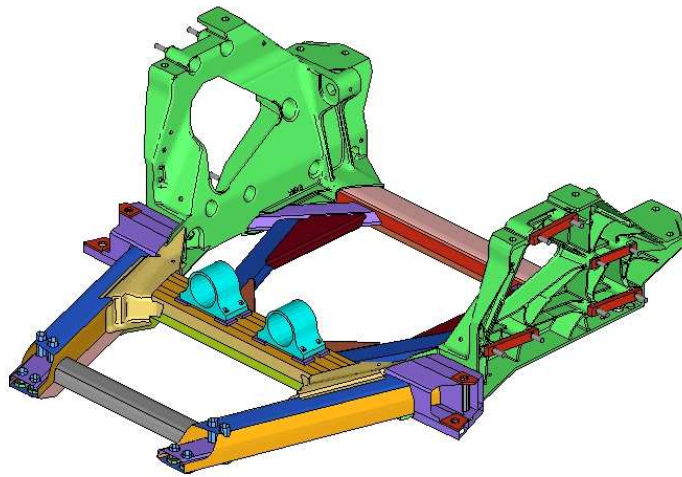
### **3.2. Analisi Modale agli elementi finiti**

La modellazione agli elementi finiti adottata in questa attività ha seguito i criteri standard definiti nel team CAE di Ferrari S.p.A.

Gli estrusi e le lamiere sono stati modellati utilizzando la formulazione shell e impiegando elementi di tipo CQUAD e CTRIA lineari. Le fusioni sono state modellate utilizzando elementi tridimensionali: in particolare sono stati impiegati gli elementi CTETRA parabolici per compensare la discretizzazione spaziale di geometrie complesse. I dispositivi utilizzati durante il test (es. i “biscottini” delle sospensioni e i simulacri delle sveglie del cambio) sono stati aggiunti al modello agli elementi finiti in modo da rappresentare in maniera accurata il set-up sperimentale. Essi sono connessi alla struttura mediante elementi monodimensionali CBAR, in maniera da simulare la presenza delle viti. E’ stata utilizzata della massa non strutturale NSML1 per allineare la massa numerica al peso del componente effettivamente testato, includendo la massa aggiunta in seguito al processo di cataforesi.

La scelta della modellazione da adottare per la saldatura si è rivelata il tema principale di ricerca per questa attività. Dopo uno studio dettagliato dei metodi presenti in letteratura si è applicata una nuova formulazione della modellazione di tipo ACM2 per valutarne i benefici e successivamente estenderne l’uso nello standard di modellazione aziendale. L’indagine sulle tecniche di modellazione della saldatura presenti in letteratura e un approfondimento sul metodo adottato saranno trattate nei paragrafi successivi.

Il modello agli elementi finiti consta 453852 nodi and 379708 elementi (Figura 3.9).



**Fig. 3.9** Modello agli elementi finiti del sottotelaio

La struttura è stata analizzata in condizioni free-free. Escludendo i 6 modi di corpo rigido presenti nei risultati, le frequenze proprie estratte dall'analisi modale da 50 Hz a 500 Hz sono elencate nella tabella 3.2. Il solutore utilizzato per l'analisi modale numerica è Altair Optistruct 13.0 che è incluso nella suite Altair HyperWorks 13.0 [47].

Mode	Frequency [Hz]
7	87.196
8	89.860
9	179.518
10	218.570
11	291.526
12	297.211
13	356.828
14	363.557
15	440.470

**Tab. 3.2** Modi propri numerici

### 3.2.1. Modellazione dei giunti saldati in letteratura

La scelta della tecnica di modellazione da adottare per la saldatura dipende dal tipo di analisi che verrà realizzata. In letteratura [33], sono stati proposti diversi metodi, principalmente per analisi di tipo tensionale in ottica fatica. Il parametro fondamentale da considerare nell'analisi a fatica è l'intervallo delle tensioni (o range tensionale) calcolato

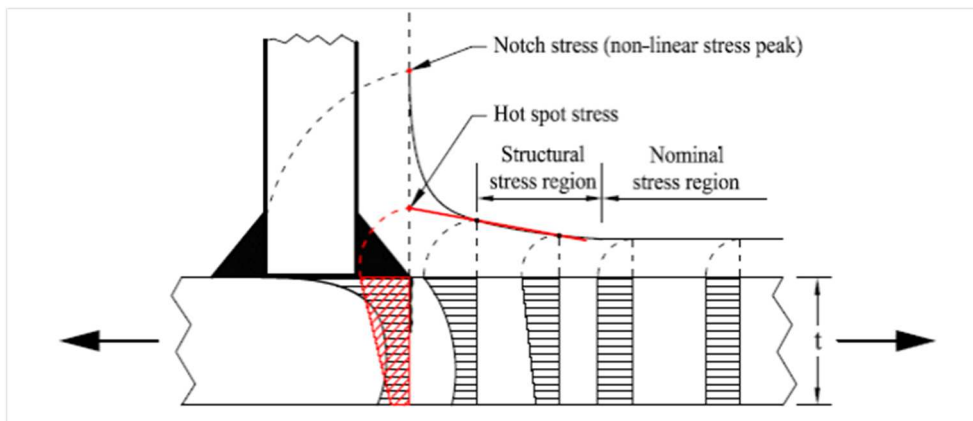
come differenza fra le tensioni massima e minima, ottenute dalle condizioni estreme di caricamento:

$$\Delta\sigma = \sigma_{max} - \sigma_{min} \quad (3.2)$$

I diversi metodi di valutazione della fatica si differenziano in funzione di come vengono definite le tensioni e di quali particolari caratteristiche di concentrazione di esse vengono considerate:

- **Nominal stress approach:** si basa su una tensione "nominale" che considera gli effetti macrogeometrici legati alla forma dei componenti, ma esclude le concentrazioni tensionali legate alla saldatura e alla discontinuità strutturale. Dunque, può essere vista come la tensione calcolata nella regione in cui non si hanno variazioni di tensione, sovente risiede ad una certa distanza dal piede di saldatura.
- **Structural o hot spot stress approach:** valuta una tensione che aggiunge a quanto considerato nell'approccio nominal stress l'effetto della discontinuità strutturale dovuta all'avvicinamento alla zona di giunzione.
- **Effective notch stress approach:** definisce una tensione che, oltre agli effetti descritti in precedenza, si preoccupa anche dell'intaglio causato dal cordone di saldatura.
- **Fracture mechanic approach:** valuta tutti i fattori che contribuiscono a innalzare le tensioni come nell'approccio effective notch stress ma si basa su calcoli di propagazione della cricca.

La figura 3.10 mostra le tensioni utilizzate e le regioni del componente in cui sono applicabili le teorie dei primi tre approcci sopra descritti.



**Fig. 3.10** Schematizzazione dei diversi approcci tensionali in prossimità di una saldatura

Siccome l'approccio notch stress considera il piede e la radice della saldatura, si rende necessario includere i cordoni nei modelli FE. Quando si usa l'hot spot stress, le giunzioni non necessitano di essere modellate con semplici modelli a shell nei quali la distribuzione tensionale non è significativamente influenzata dalla rigidità locale del giunto anche se l'hot spot stress in punti critici per la fatica è determinato dall'estrapolazione delle tensioni superficiali, usando gli opportuni punti di riferimento.

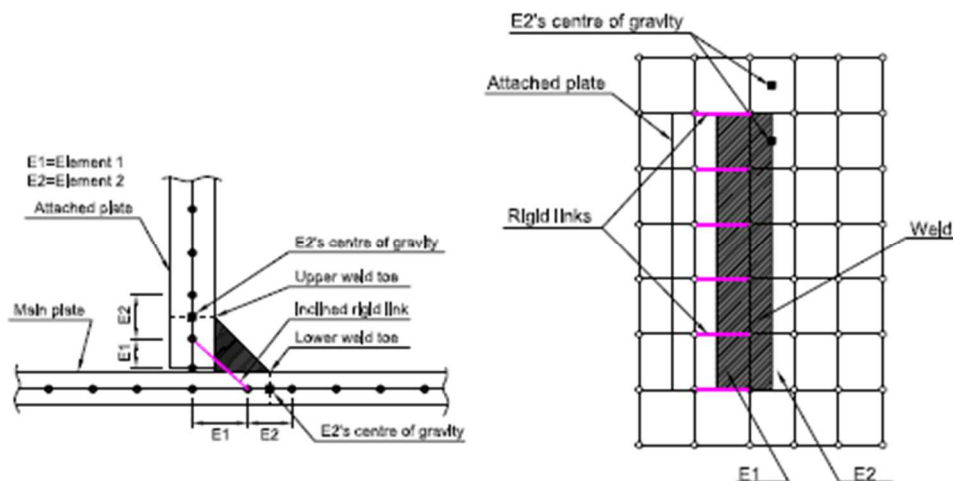
Comunque, le giunzioni dovrebbero essere modellate in casi dove le tensioni sono influenzate da comportamento flessionale o quando non è facile distinguere lo stress non lineare, causato dall'intaglio al piede di saldatura, dagli effetti di concentrazioni degli sforzi che nascono da irregolarità geometriche. In questi casi la rigidità della sezione saldata dovrebbe essere tenuta in considerazione e le saldature possono essere modellate usando diverse tecniche.

Le principali tecniche di modellazione sono:

- Utilizzo di elementi rigidi (RBE, Rigid Body Element).
- Utilizzo di elementi 2D (shell).
- Meshatura completa o parziale del componente con elementi 3D.

### 3.2.1.1. Elementi rigidi

La base di questa tecnica è di modellare la rigidità locale aggiuntiva apportata dalla saldatura. Questa rigidità può essere modellata giungendo i due elementi shell adiacenti usando dei link rigidi definiti da coppie di nodi e localizzati lungo tutta la lunghezza della saldatura.



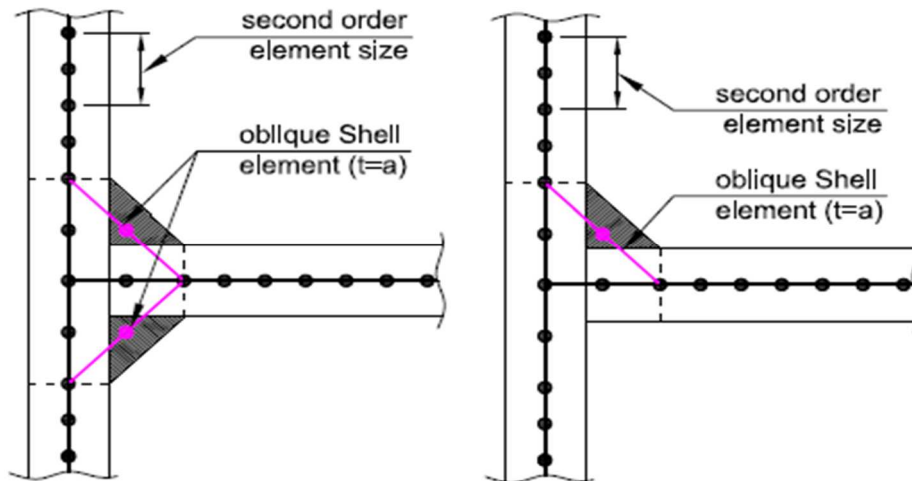
**Fig. 3.11** Linee guida generali per l'utilizzo degli RBE nelle saldature

La lunghezza degli elementi, nominati E1 ed E2 in fig. 3.11, dovrebbe essere scelta il più correttamente possibile per rappresentare la rigidità locale e perciò ottenere un valore di tensioni affidabile. Il nodo in comune per gli elementi E1 ed E2 è usato per congiungere questi elementi con degli RBE. E' importante notare che le piastre all'intersezione non sono connesse nella giunzione. Inoltre in questa tecnica vanno utilizzati elementi shell a 4 nodi.

### 3.2.1.2. Elementi 2D/Shell

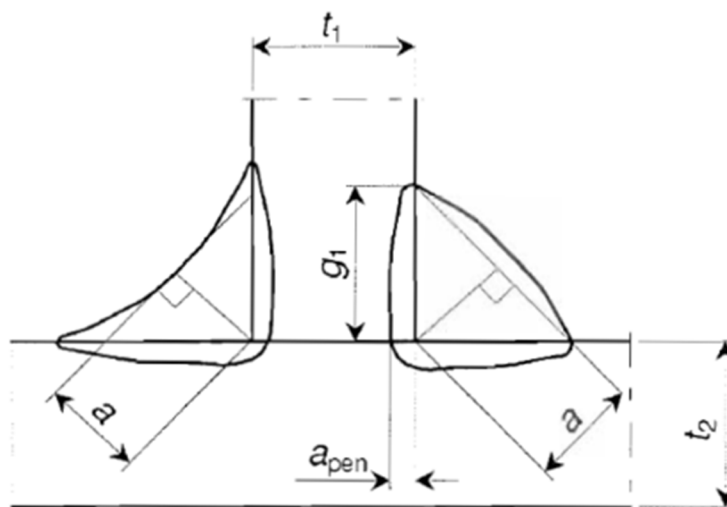
Ci sono diverse strategie quando si vogliono usare elementi shell. Quello consigliato da [20] è l'utilizzo delle cosiddette *shell oblique*. In questo caso sia la rigidità che la geometria della saldatura può essere correttamente rappresentata. La piastra attaccata dovrebbe essere unita a quella principale all'intersezione, così come mostrato nella prossima immagine:





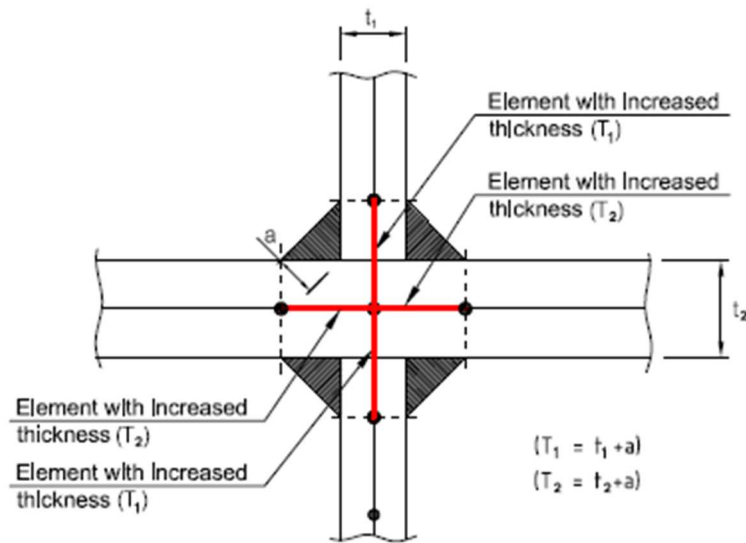
**Fig. 3.12** Linee guida generali per la strategia a shell oblique

Lunghezza e posizionamento delle shell che formano il cordone vanno scelte in base alla fig. 3.12. Di norma si prende lo spessore di questi elementi pari alla dimensione di gola del cordone stesso (quota  $a$  in fig. 3.13).



**Fig. 3.13** Schematizzazione di due tipici profili di un giunto a T. Con  $a$  si indica di solito la gola della saldatura.

Un'altra strategia di modellazione del cordone con elementi shell è quella chiamata *a spessori aumentati*. Proposta da [36] prevede l'utilizzo di un collasso nodale all'intersezione delle piastre e gli elementi che compongono la zona di giunzione vanno impostati con uno spessore maggiorato rispetto al materiale base. Oltre a questo aspetto [35] consiglia anche opportune dimensioni degli elementi di tale zona senza ulteriori linee guida, vedere fig. 3.14.



**Fig. 3.14** Strategia di shell a spessori aumentati, rivista da Ericsson [37]

In Fig. 3.14 è rappresentata un'esemplificazione del metodo a spessori aumentati rivista da Ericsson [37], nella quale si specifica un po' meglio il metodo proposto da [36]. Nello specifico si consigliano due file di elementi in ambo le piastre con spessori aumentati come mostrato nell'immagine.

### 3.2.1.3. Elementi 3D/Solidi

Modellare le saldature con elementi solidi deformabili sia per modelli con elementi shell che solidi è usato largamente per la sua semplicità nel lavoro di pre-processing e l'accuratezza dei risultati in quanto la rigidità delle giunzioni può essere ben considerata. Sia la rigidità che la geometria, con questa strategia, possono essere facilmente rappresentate.

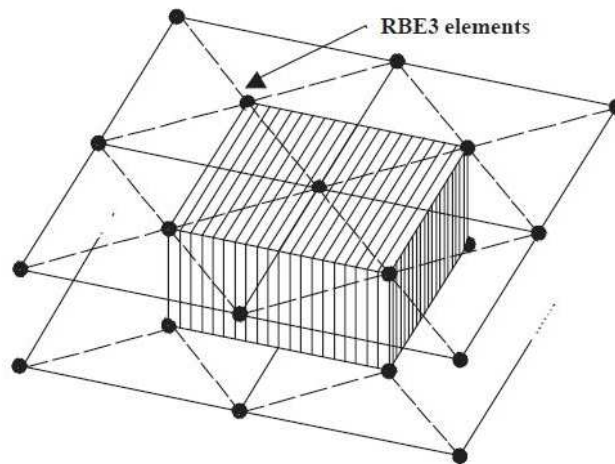
Nel caso si stiano usando elementi solidi per le saldature, mentre le piastre sono shell, si rende necessaria una particolare tecnica per connettere questi due tipi di elementi: questo perchè gli elementi solidi hanno 3 gradi di libertà (DOF) in ogni nodo mentre le shell ne hanno 5. I momenti flettenti nelle shell necessitano di essere trasferiti agli elementi 3D. Un modo per ovviare a questo problema è connettere le due zone con dei MPC (multi-point constraint), che possono essere svolti tramite elementi rigidi.

La modellazione dell'intero componente con elementi solidi ben si sposa con l'approccio notch stress, in quanto si possono rappresentare i componenti fino al livello di dettaglio

desiderato, questo a scapito di una più pesante modellazione causata da una mesh per forza di cose molto fitta.

### 3.2.2. Descrizione del metodo ACM2 per la modellazione dei giunti saldati

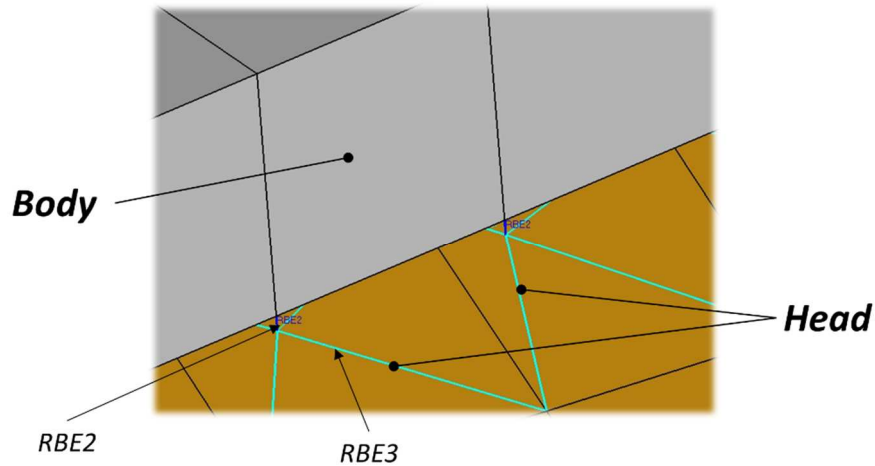
Heiserer [34] ha proposto un modello noto come ACM2 per la modellazione della saldatura a punti (Figura 3.15). Il modello consiste in un elemento brick connesso alla lamiera superiore e inferiore attraverso degli elementi RBE3. L'elemento RBE3 distribuisce i carichi applicati al modello: le forze e i momenti applicati all'elemento brick vengono distribuiti sui nodi delle shell in una maniera che dipende dalla geometria degli RBE3 e dai weighting factor assegnati ai nodi delle shell. Le forze che agiscono sui nodi dell'elemento brick vengono trasferite al baricentro pesato dei nodi delle shell insieme con i momenti di trasporto. La forza è distribuita sui nodi delle shell in maniera proporzionale ai fattori di pesatura; il momento è distribuito come le forze, le cui grandezze sono proporzionali alla loro distanza dal baricentro per il rispettivo fattore di ponderazione.



**Fig. 3.15** Schema del metodo ACM2 per saldature a punti

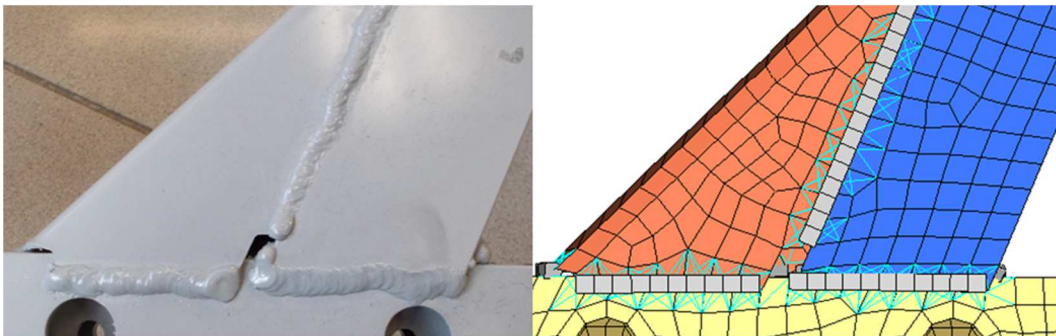
Tale metodologia, prevista per le saldature di tipo spotweld, è stata estesa alle saldature continue di tipo MIG. In tale tecnica viene creata una riga di CHEXA per rappresentare il corpo del giunto saldato (*body*) e vengono creati diversi RBE2/RBE3 per connettere il corpo della saldatura ai componenti alla struttura (*head*). Gli elementi head proiettano e connettono i nodi del body ai nodi delle shell giuntate. Se c'è una proiezione diretta

normale alla superficie, verranno usati elementi RBE2; se c'è una proiezione non-normale, verranno usati elementi RBE3. Gli elementi CHEXA sono proiettati in modo da toccare gli elementi shell delle parti connesse (Figura 3.16).



**Fig. 3.16** Dettaglio della modellazione ACM2 estesa alla saldatura continua

Questo approccio permette di creare un modello FEM che può essere utilizzato sia per analisi tensionali sia per analisi dinamiche strutturali. Nella figura 3.17 viene mostrato un dettaglio della saldatura sul sottotelaio e nel corrispondente modello agli elementi finiti.



**Fig. 3.17** Dettaglio del giunto saldato

### **3.2.3. Aggiornamento e allineamento del modello agli elementi finiti**

Sono state effettuate alcune indagini sperimentali sul componente testato per migliorare l'accuratezza del modello agli elementi finiti.

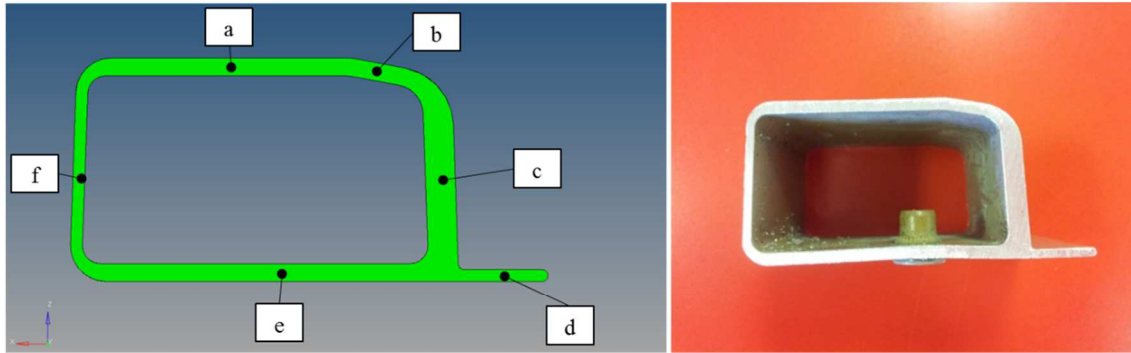
In una prima fase il componente è stato pesato e in diverse configurazioni per ricavarne il baricentro per via sperimentale. Tali misurazioni hanno confermato la corretta distribuzione di massa all'interno del modello agli elementi finiti. In figura 3.18 si

possono vedere alcune fasi dell'attività di calcolo del baricentro mediante il “metodo delle pesate”.



**Fig. 3.18** Fasi del calcolo del baricentro per via sperimentale

In una seconda fase il componente è stato sezionato in diversi punti per misurare gli spessori degli estrusi e valutare le differenze rispetto allo spessore nominale, riportato nel modello agli elementi finiti. Tali misurazioni hanno confermato la globale correttezza di tali dati e le piccole variazioni riscontrate sono state introdotte nel modello agli elementi finiti. Nella figura 3.19 è riportata, come esempio, l'indagine condotta sulla sezione della traversa posteriore del sottotelaio.



	Nom	Mis 1	Mis 2	Mis 3	Mis 4	Mis 5	Avg
a	3.0	2.96	2.98	2.99	2.97	2.97	3.0
b	3.0	2.99	2.94	2.94	2.97	2.98	3.0
c	5.0	4.85	4.86	4.87	4.87	4.86	4.9
d	2.0	1.96	1.98	1.95	1.94	1.97	2.0
e	3.0	2.89	2.90	2.88	2.91	2.89	2.9
f	2.0	1.95	1.96	1.97	1.94	1.94	2.0

Fig. 3.19 Dettagli degli spessori misurati (in mm) sulla traversa posteriore

### 3.3. Valutazione della correlazione e sviluppi futuri

La fase di correlazione è focalizzata nel valutare e comprendere la correlazione tra il test e i dati numerici. Un indice su base modale, che è usato per comparare le forme modali sperimentali e numeriche, è il Modal Assurance Criterion (MAC). Il MAC fu originariamente sviluppato per valutare l'ortogonalità tra vettori e, negli anni '70, fu proposto da Allemang e Brown [38] come coefficiente di correlazione per le analisi modali.

Lo scopo del MAC è fornire una misura di consistenza tra un vettore modale di riferimento e un altro. E' definito come uno scalare che può assumere valori da 0 a 1, a seconda della consistenza tra i vettori.

Il valore di MAC tra tra vettore modale sperimentale e vettore modale numerico è ottenuto dalla seguente formulazione:

$$MAC(\{\Phi\}_{test}, \{\Phi\}_{FE}) = \frac{|\{\Phi\}_{test}^T \cdot \{\Phi\}_{FE}|^2}{(\{\Phi\}_{test}^T \cdot \{\Phi\}_{test}) \cdot (\{\Phi\}_{FE}^T \cdot \{\Phi\}_{FE})} \quad (3.3)$$

dove:

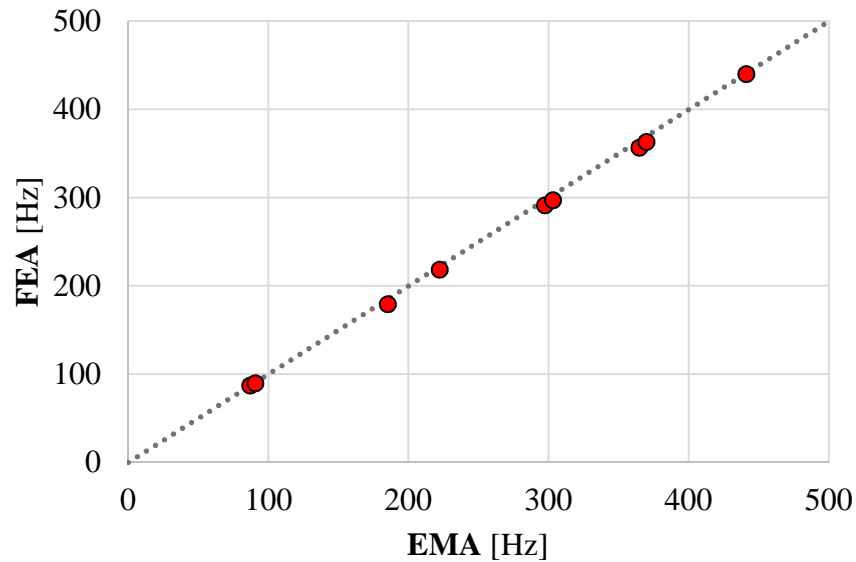
- $\{\Phi\}_{test}$  è il vettore modale associato alla forma modale sperimentale
- $\{\Phi\}_{test}^T$  è il trasposto di  $\{\Phi\}_{test}$
- $\{\Phi\}_{FE}$  è il vettore modale associato alla forma modale numerica

- $\{\Phi\}_{FE}^T$  è il trasposto di  $\{\Phi\}_{FE}$

Generalmente, i valori di MAC rappresentativi di una buona correlazione sono maggiori di 0.7 [39]. E' importante sottolineare che ogni grado di libertà (DOF) fornisce un contributo al calcolo del MAC. Quindi, spostamenti *in-phase* considerevoli forniscono un contributo positivo alla correlazione; spostamenti *out-of-phase* considerevoli forniscono un contributo negativo alla correlazione; i piccoli spostamenti forniscono contributi meno importanti al MAC.

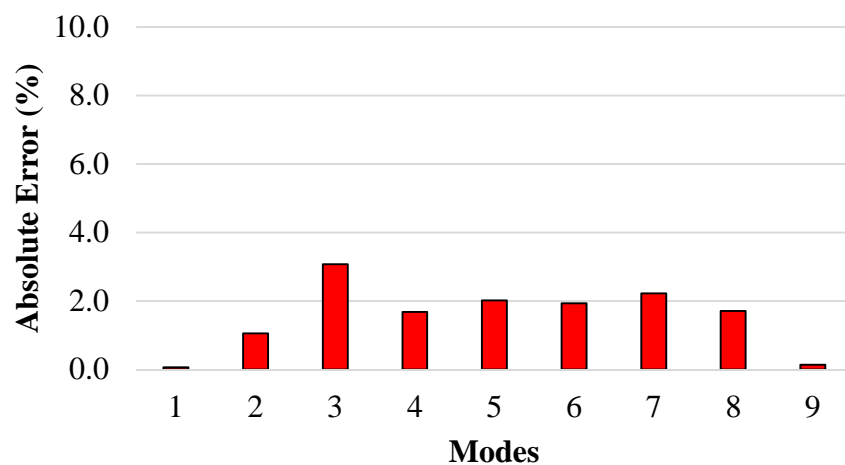
La valutazione della correlazione è stata effettuata comparando i valori delle frequenze proprie e l'errore percentuale, le forme modali e la matrice di MAC.

Una prima stima della bontà della correlazione può essere fornita plottando i valori delle coppie di frequenze proprie, sperimentale e numerica; in una buona correlazione questi punti formeranno una retta a 45°. La figura 3.20 mostra quindi una correlazione più che accettabile, con le coppie di frequenze proprie che disegnano una retta molto vicina alla retta di riferimento a 45°.



**Fig. 3.20** Plot delle frequenze proprie

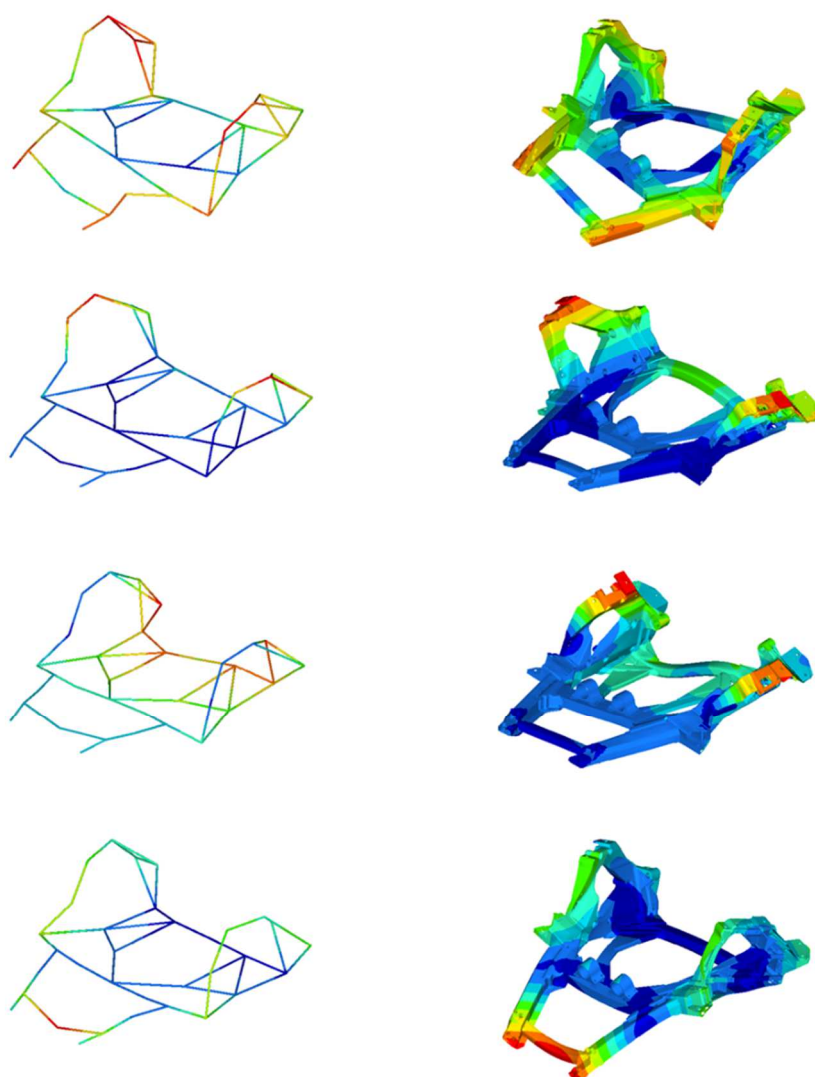
Come mostrato nella Figura 3.21, analizzando ogni singola coppia di frequenze, l'errore percentuale tra il valore sperimentale e il valore numerico è inferiore al 4%. La stima dell'errore percentuale rappresenta un indice molto semplice per verificare la correlazione nelle applicazioni automotive.



**Fig. 3.21** Istogramma dell'errore percentuale assoluto

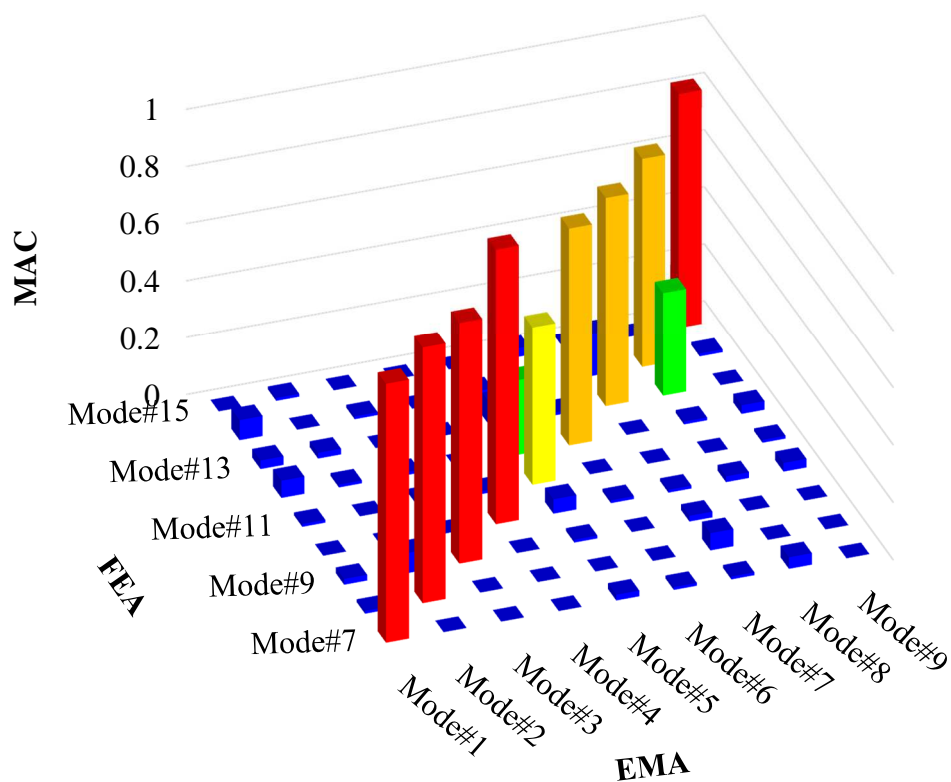
Inoltre, è stata effettuata una comparazione visiva delle deformate modali. Nella Figura 3.22 vengono riportate le deformate sperimentali e numeriche delle prime 4 coppie di modi.





**Fig. 3.22** Forme modali dei primi quattro modi propri della struttura: a sinistra il modello sperimentale e a destra il modello FEM

In aggiunta ad una comparazione visiva di ogni singola deformata modale, è stato valutato l'indice di MAC per investigare la correlazione raggiunta. La figura 3.23 mostra come i valori sulla diagonale principale della matrice di MAC siano superiori al valore di 0.7, indice di una buona correlazione raggiunta. Solo la quinta coppia di modi mostra un valore inferiore allo 0.7. Questo può essere spiegato sia perché in quel range di frequenza sono presenti due modi propri a frequenze molto vicine, sia perché durante l'impact test il modo proprio 5 non è stato eccitato a sufficienza. Ciò si può evincere anche dalla figura 3.5, in cui la curva blu (somma delle FRF) presenta un picco lievemente accennato in corrispondenza della frequenza associata al modo 5.



**Fig. 3.23** Matrice di MAC

La tabella 3.3 riassume i risultati ottenuti, evidenziando la frequenza propria di ciascun modo, l'errore percentuale tra sperimentale e numerico e l'indice di MAC per ogni coppia di modo.

Mode Pair	EMA Freq. [Hz]	FEA Freq. [Hz]	Error (%)	MAC
1	87.144	87.196	0.060	0.90
2	90.818	89.860	1.055	0.89
3	185.216	179.518	3.076	0.84
4	222.299	218.570	1.677	0.96
5	297.525	291.526	2.016	0.55
6	303.071	297.211	1.934	0.76
7	364.932	356.828	2.221	0.73
8	369.877	363.557	1.709	0.73
9	441.061	440.470	0.134	0.82

**Tab. 3.3** Riassunto della correlazione numerico-sperimentale

Si può concludere quindi che per il caso in esame si è raggiunta una buona correlazione numerico sperimentale che non ha richiesto alcuna procedura di sensitivity o modal updating. Nel futuro si prevede, per attività analoghe, di considerare la possibilità di eccitare la struttura in più punti in maniera da ampliare la campagna sperimentale, fornendo più dati e migliorando la coerenza delle FRF e l'estrazione delle frequenze proprie. In questo caso si è utilizzato un unico indice di correlazione, il MAC. In aggiunta al MAC si consiglia di utilizzare il Coordinate Modal Assurance Criterion (CoMAC), che permette di identificare quali punti di misura contribuiscono negativamente ai valori bassi di MAC e che possono essere indice di bassa correlazione locale.

Per quanto riguarda la parte relativa alla modellazione agli elementi finiti, la tecnica implementata permette di rappresentare in maniera corretta il comportamento dinamico della struttura e quindi risulta essere consistente sia in termini di rigidità che di massa. Ulteriori sviluppi possono interessare un confronto puramente numerico tra diversi tipi di modellazione della saldatura ritrovati in letteratura per stabilire benefici e limiti di ogni applicazione.

## **4. Correlazione numerico-sperimentale dei modi di cavità acustica di una vettura GT**

La capacità di predire il comportamento acustico dell'abitacolo, soggetto a differenti eccitazioni, risulta essere una tematica dall'interesse crescente per l'ingegneria del veicolo. Quando si imposta uno studio sul rumore interno di una vettura è fondamentale rapportare le risposte acustiche ottenute con il sistema intrinseco della cavità abitacolo. In letteratura sono presenti numerosi lavori che si interessano dell'estrazione dei modi di cavità dell'abitacolo [40-41-42-43]. Una caratterizzazione della cavità abitacolo può essere effettuata attraverso l'analisi modale acustica che fornirà i parametri modali richiesti, come ad esempio le frequenze di risonanza, i coefficienti di smorzamento, i fattori di partecipazione e le forme modali.

Le frequenze di risonanza dell'abitacolo possono essere eccitate dal powertrain o da input stradali e l'accoppiamento di tali eccitanti può causare inaccettabili livelli di rumore per il guidatore e i passeggeri.

Il rumore interno può provenire da diverse sorgenti, tra cui possono essere annoverati i "boom" dell'abitacolo. Queste frequenze di risonanza acustica si manifestano a frequenze generalmente basse (inferiori a 200 Hz) che sono dominate dal rumore di tipo structure-borne. Gli input strutturali generalmente provengono dal gruppo powertrain o da risposte della struttura a seguito delle forzanti strada.

L'obiettivo di questo capitolo è capire come caratterizzare sia quantitativamente che qualitativamente, attraverso approcci diversi, il comportamento della cavità acustica della Ferrari California T (mostrata in Figura 4.1) nel range delle frequenze del "boom", al di sotto dei 200 Hz.



**Fig. 4.1** Ferrari California T

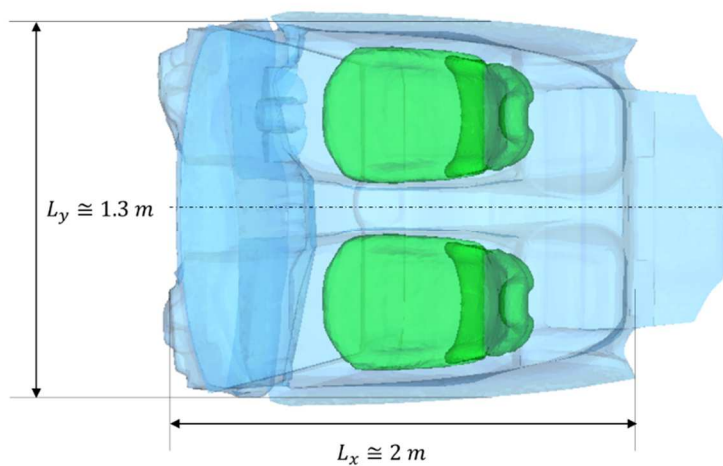
#### **4.1. Modi di cavità acustica - Approccio Analitico**

Nelle fasi preliminari di impostazione del veicolo, non sono richiesti calcoli accurati ma si possono effettuare approssimazioni rapide ma indicative dei trend delle performance della vettura. Per queste ragioni ci si avvale di formule analitiche approssimate che sono spesso utilizzate per effettuare considerazioni e dimensionamenti di massima.

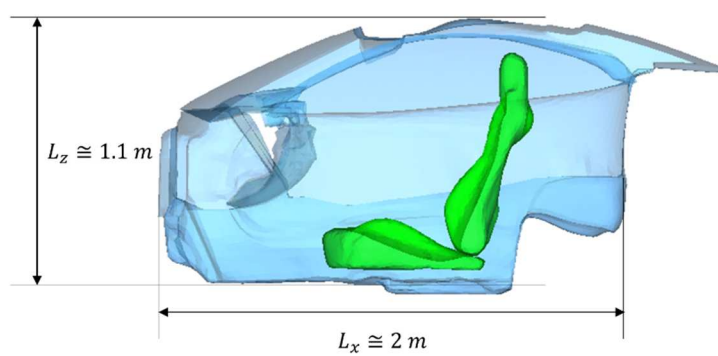
Per una quanto riguarda una cavità acustica rettangolare, le frequenze di risonanza possono essere ottenute mediante la seguente formula analitica:

$$f_n = \frac{c}{2} \cdot \sqrt{\left(\frac{n_x}{L_x}\right)^2 + \left(\frac{n_y}{L_y}\right)^2 + \left(\frac{n_z}{L_z}\right)^2} \quad (4.1)$$

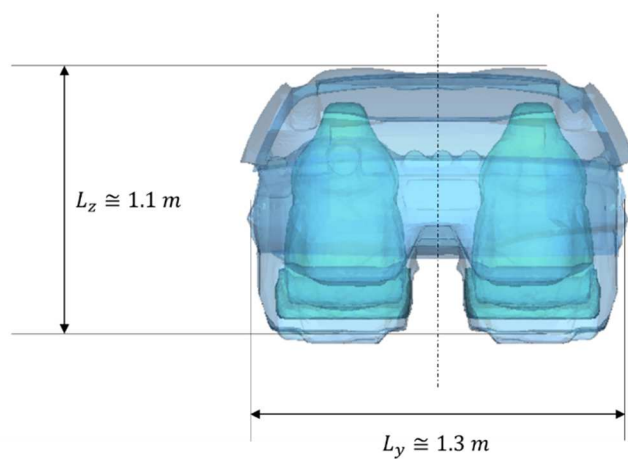
dove  $c$  è la velocità del suono dell'aria,  $L_x$ ,  $L_y$  e  $L_z$  rappresentano le dimensioni della cavità e  $n_x$ ,  $n_y$  e  $n_z$  rappresentano gli indici della forma modale della risonanza. Le dimensioni di massima della cavità in esame sono mostrate nelle Figure 4.2, 4.3 e 4.4.



**Fig. 4.2** Cavità acustica nel piano x-y



**Fig. 4.3** Cavità acustica nel piano x-z



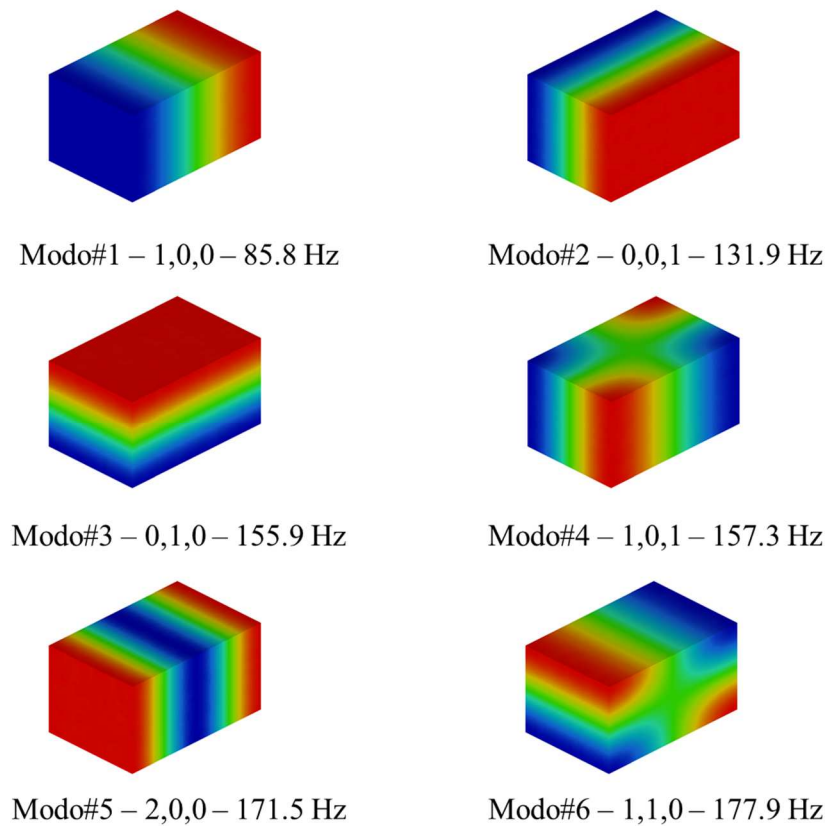
**Fig. 4.4** Cavità acustica nel piano y-z

Nella Tabella 4.1 sono indicati i primi 10 modi di cavità calcolati con il metodo analitico.

Modes	Modal Shape	Frequency [Hz]
Mode#1	1, 0, 0	85.8
Mode#2	0, 0, 1	131.9
Mode#3	0, 1, 0	155.9
Mode#4	1, 0, 1	157.3
Mode#5	2, 0, 0	171.5
Mode#6	1, 1, 0	177.9
Mode#7	0, 1, 1	204.2
Mode#8	2, 0, 1	216.4
Mode#9	0, 0, 2	221.5
Mode#10	2, 1, 0	231.8

**Tab. 4.1** Modi di cavità analitici

Nella Figura 4.5, come esempio, sono mostrate le forme modali delle prime sei frequenze di risonanza ricavate dall'approccio analitico.



**Fig. 4.5** Forme modali delle frequenze di risonanza analitiche

## 4.2. Modi di cavità acustica – Approccio Sperimentale

### 4.2.1. Teoria dell'analisi modale acustica

In questo paragrafo verrà fornita una breve panoramica sulla teoria dell'analisi modale di tipo acustico. Si considera un volume tridimensionale chiuso, a pareti rigide non vibranti, con impedenza rigida o finita. L'equazione di governo del sistema, eccitato da una sorgente volumetrica nella posizione  $\mathbf{r}_0$  può essere scritta come:

$$\nabla^2 p(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c^2} \ddot{p}(\mathbf{r}, t) = -\rho \dot{q} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \quad (4.2)$$

dove  $p$  è la pressione sonora, che è funzione dello spazio  $\mathbf{r}$  e del tempo  $t$ ;  $c$  è la velocità del suono;  $\rho$  è la densità del mezzo e  $\dot{q}$  è la portata.

La condizione al contorno sulla superficie rigida  $S$  è:

$$\frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}} = 0 \quad (4.3)$$

dove  $\mathbf{n}$  è il versore normale alla superficie  $S$ .

Assumendo che un numero di sorgenti volumetriche a velocità nota sono posizionate all'interno della cavità e che la pressione all'interno del volume è campionata con un numero sufficiente di campioni, si dimostra che l'equazione di continuità delle onde può essere sostituita da una formulazione da una discretizzazione equivalente:

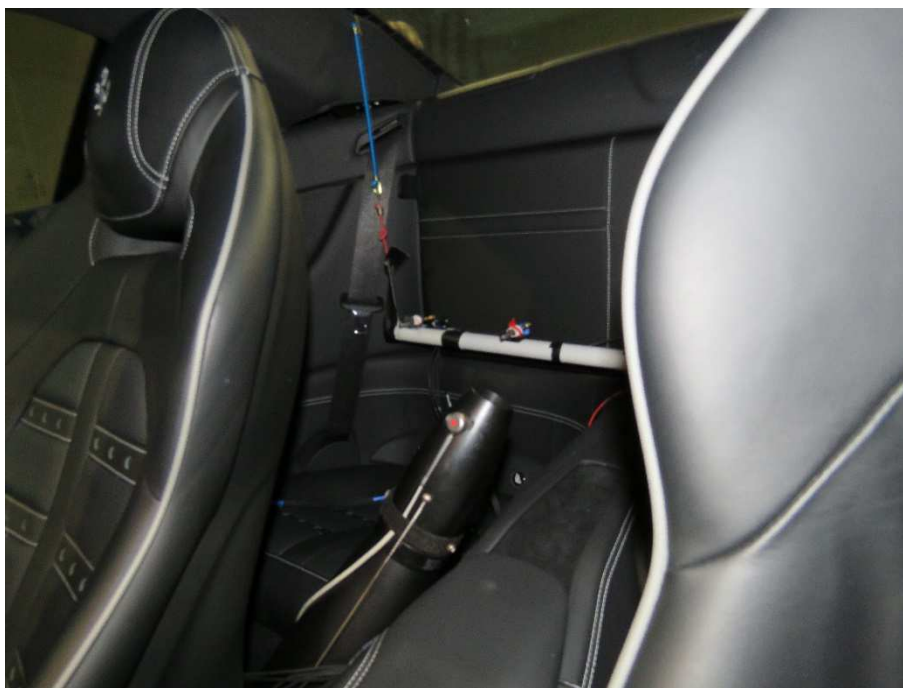
$$A\ddot{p} + B\dot{p} + Cp = \dot{q} \quad (4.4)$$

Nessun significato fisico diretto può essere attribuito alle matrici  $A$ ,  $B$ , e  $C$ , ma l'equazione di governo discreta è equivalente all'equazione meccanica del moto, con le matrici  $A$ ,  $B$  e  $C$  che rappresenterebbero le equivalenti matrici di massa  $M$ , di smorzamento  $C$  e di rigidità  $K$ ,  $p$  rappresenterebbe lo spostamento  $x$  e  $\dot{q}$  la forza  $F$ . Si può quindi concludere che l'approccio classico di estrazione dei parametri modali può essere esteso anche nel caso di analisi modale acustica. Interessanti espansioni di analisi modali di un sistema vibro-acustico accoppiato possono essere ritrovati in letteratura.



#### 4.2.2. Test Sperimentale

La campagna di test sperimentali e la stima dei modi di cavità acustica della vettura è stata condotta con la collaborazione del team NVH Veicolo di Ferrari S.p.A. In questo paragrafo si fornirà una panoramica generale sul set up sperimentale, con una breve descrizione della metodologia e le procedure adottate. Per eccitare la cavità acustica si è utilizzata una sorgente acustica volumetrica omnidirezionale, mostrata in figura 4.6. Si è deciso di posizionare la sorgente omnidirezionale nella parte posteriore dell'abitacolo in corrispondenza del lato passeggero. L'utilizzo di tale sorgente permette di acquisire risposte in frequenza acustiche senza disturbare la cavità. La posizione individuata risulta essere ottimale per eccitare le frequenze di risonanza acustiche mediante l'utilizzo di una sola sorgente. In letteratura è possibile trovare numerosi riferimenti a misure di modi di cavità utilizzando sorgenti multiple.



**Fig. 4.6** Posizionamento della sorgente acustica volumetrica omnidirezionale

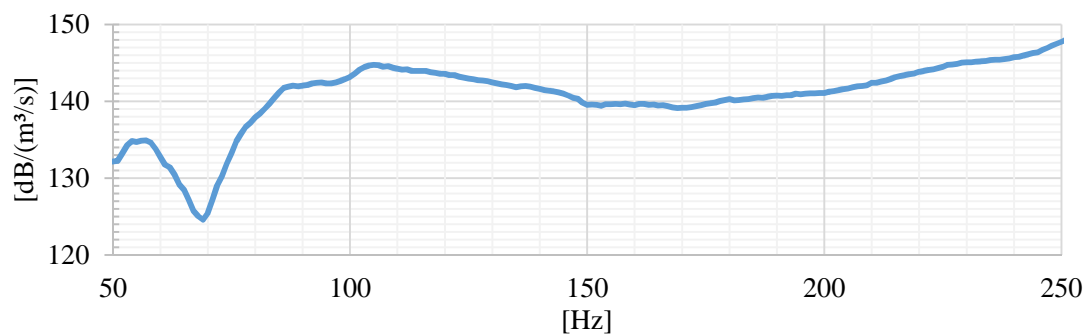
I dati sperimentali consistono in un set di Acoustic Transfer Functions (ATFs) dalla sorgente acustica (input) ai microfoni (output). Le ATFs sono definite come  $p/\dot{q}$  che dimensionalmente equivale a  $Pa/(m^3/s)$ . Per campionare la cavità acustica ci si è avvalsi dell'uso di una barra sulla quale sono posizionati 5 microfoni (array) distanziati

l'uno dall'altro di 20 cm. La barra è sospesa nell'abitacolo mediante l'utilizzo di elastici, come mostrato in Figura 4.7.



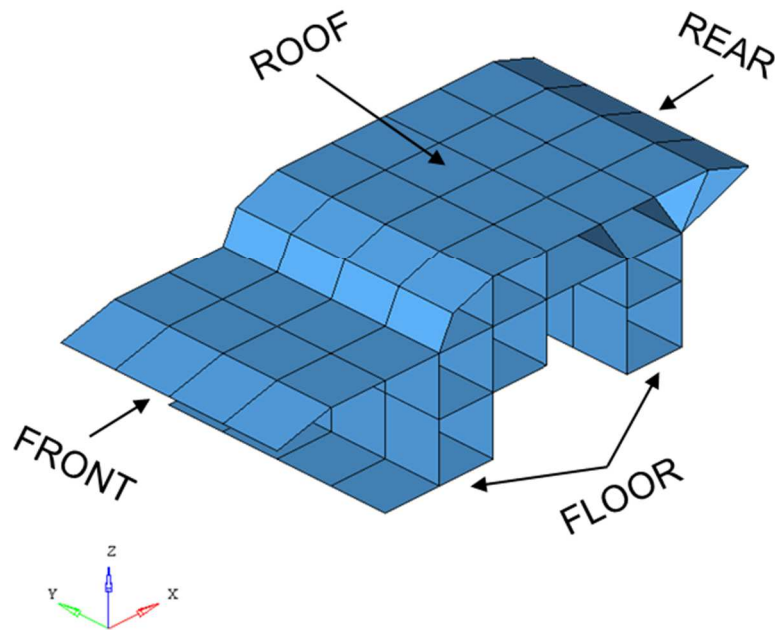
**Fig. 4.7** Posizionamento di un array di microfoni all'interno dell'abitacolo

Per campionare l'intero abitacolo sono state necessarie 125 FRF. Sono state anche effettuate 40 misurazioni all'interno della cavità baule per estrarre i modi di cavità del volume secondario e oggettivare se i due sistemi fossero in comunicazione. Per ogni set di misure sono state acquisite le pressioni sonore in corrispondenza dell'orecchio destro e sinistro del guidatore (RDriver e LDriver); tali FRF rappresentano un check di controllo della accuratezza e ripetibilità della misurazione. In Figura 4.8 è riportato un esempio di ATF da sorgente a LDriver.



**Fig. 4.8** Esempio di ATF da sorgente a orecchio destro e sinistro del guidatore

La Figura 4.9 mostra la discretizzazione del volume effettuata per campionare la cavità abitacolo.



**Fig. 4.9** Discretizzazione della cavità abitacolo in 125 punti di campionamento

Anche se verranno misurate delle funzioni di trasferimento puramente acustiche, ci si aspetta una densità modale mediamente alta dal momento che la cavità è accoppiata con corpi flessibili e le risonanze dei sistemi strutturali potrebbero intervenire nelle misure sperimentali (principalmente le vibrazioni dovute al parabrezza, al lunotto e al tetto).

Inoltre sono necessarie alcune considerazioni sullo smorzamento presente all'interno della cabina. In genere l'alto smorzamento presente in abitacolo riduce e allarga i picchi delle risposte in frequenza generando sovrapposizione tra i modi propri. Nel caso dell'abitacolo di una vettura GT, le considerazioni sullo smorzamento vanno indagate più nel dettaglio poiché le finizioni interne presenti sono quasi esclusivamente ricoperte da pelle, generando quindi una condizione di "camera riverberante" dal volume molto piccolo.

L'estrazione delle frequenze proprie è stata effettuata mediante il metodo Polymax implementato nel software LMS Test.Lab. L'analisi e processamento dei dati è stato

effettuato dal team di NVH Veicolo di Ferrari S.p.A., che ha fornito le frequenze proprie indicate nella tabella 4.2.

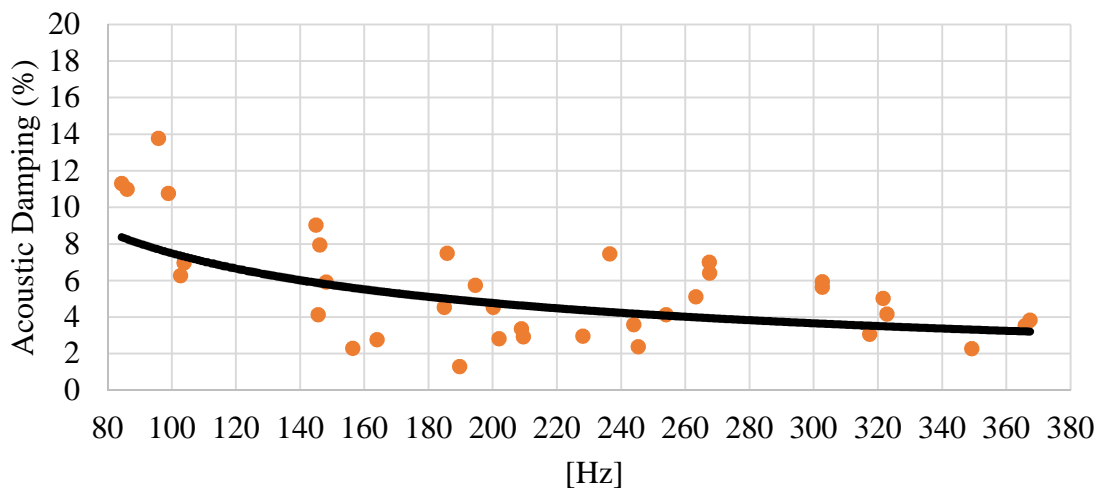
Mode Description	Frequency [Hz]
1st Longitudinal	84.4
1st Lateral	103.9
2nd Longitudinal	135.8
1st Longitudinal and 1st Lateral	145.5
1st Lateral Trunk	156.3
1st Vertical	164.6
2nd Longitudinal and 1st Lateral	194.5
1st Longitudinal Trunk	208.3

**Tab. 4.2** Modi di cavità sperimentali

### 4.3. Modi di cavità acustica – Approccio Numerico

E' stato costruito un modello acustico agli elementi finiti della cavità abitacolo della vettura a pareti rigide. Per la definizione della geometria si sono tenuti in considerazione gli ingombri esterni delle finizioni della vettura, come ad esempio la plancia, i sedili, i pannelli porta e l'imperiale.

E' stata applicato al fluido una curva di smorzamento costruita con i coefficienti di smorzamento modale estratti dai test sperimentali. Un esempio di tale curva viene fornito nella tabella 4.3.



**Tab. 4.3** Curva di smorzamento modale costruita su base sperimentale

Il modello agli elementi finiti della cavità è stato realizzato mediante circa 48000 nodi e 215000 elementi di tipo tetra lineare. La taglia media della mesh è di circa 35 mm sulle superfici esterne (in ottica accoppiamento fluido-struttura) e cresce fino a circa 100 mm all'interno del volume in maniera da ridurre il costo computazionale. Tale taglia di mesh risulta coerente con i criteri necessari per cogliere le lunghezze d'onda fino a 400 Hz, in accordo con la seguenti formule:

$$f_{max} = \frac{c}{\lambda_{min}} \quad (4.5)$$

e

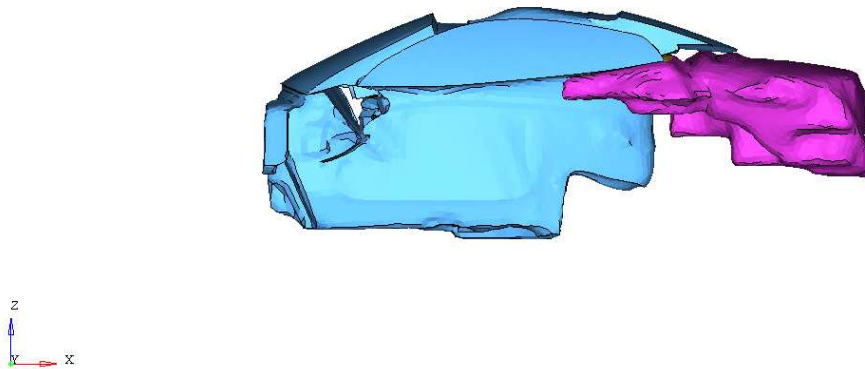
$$L_{max} = \frac{\lambda_{min}}{8} \quad (4.6)$$

dove 8 è il numero di elementi per lunghezza d'onda consigliati per gli elementi lineari in modo da cogliere la fluttuazione acustica.

Quindi:

$$f_{max} = \frac{c}{8 * L_{max}} \quad (4.7)$$

In accordo con Ferrari S.p.A., si è deciso di indagare anche la cavità secondaria del baule e di valutare le interazioni fra le due cavità. Sono state definite delle zone di eventuale trafileamento in modo da mettere in comunicazione i due volumi per analisi numeriche future. I sedili sono stati modellati con elementi solidi ai quali è stata assegnata un materiale denominato “*aria pesante*”, che rappresenta un fluido con le proprietà dell'aria ma con la densità di un ordine di grandezza maggiore. Tale scelta è in accordo con gli standard di modellazione suggeriti dall'azienda. Il modello finale, rappresentato nella figura 4.10, consta circa 60000 nodi e 289000 elementi tetra lineari.



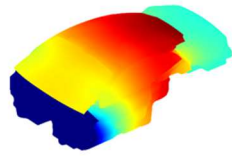
**Fig. 4.10** Cavità abitacolo (in azzurro) e cavità baule (in viola)

L'estrazione delle frequenze proprie del sistema considerato ha fornito le frequenze proprie indicate nella tabella 4.4.

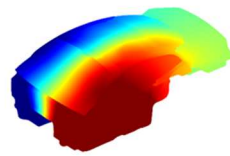
<b>Mode Description</b>	<b>Frequency [Hz]</b>
1st Longitudinal	81.9
1st Lateral	99.6
2nd Longitudinal	132.1
1st Longitudinal and 1st Lateral	140.8
1st Lateral Trunk	152.9
1st Vertical	167.4
2nd Longitudinal and 1st Lateral	188.1
1st Longitudinal Trunk	196.0

**Tab. 4.4** Modi di cavità numerici

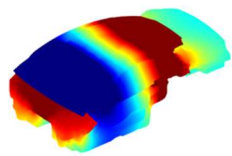
La figura 4.11 mostra i modi di cavità acustici estratti mediante l'analisi agli elementi finiti. Il software utilizzato è Actran 14.0, sviluppato dalla Free Field Technologies, MSC Software Company [48].



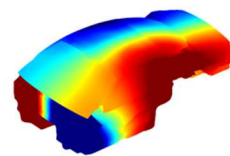
Modo#1 – 81.9 Hz  
*1st Longitudinal*



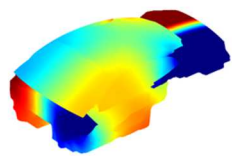
Modo#2 – 99,6 Hz  
*1st Lateral*



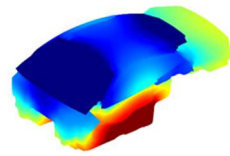
Modo#3 – 132.1 Hz  
*2nd Longitudinal*



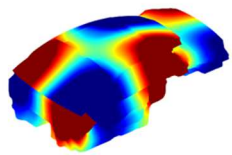
Modo#4 – 140,8 Hz  
*1st Longitudinal and 1st Lateral*



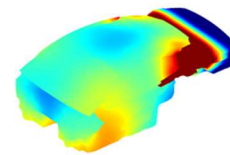
Modo#5 – 152.9 Hz  
*1st Lateral Trunk*



Modo#6 – 167.4 Hz  
*1st Vertical*



Modo#7 – 188.1 Hz  
*2nd Longitudinal and 1st Lateral*



Modo#8 – 196.0 Hz  
*1st Longitudinal Trunk*

**Fig. 4.11** Forme modali delle frequenze di risonanza numeriche

#### 4.4. Valutazione della correlazione e sviluppi futuri

In linea generale si è raggiunta una buona correlazione in termini di frequenze proprie e forme modali, come indicato nella tabella 4.4.

Mode	EMA Frequency [Hz]	FEA Frequency [Hz]	Error [%]
1st Longitudinal	84.4	81.9	2.96
1st Lateral	103.9	99.6	4.14
2nd Longitudinal	135.8	132.1	2.72
1st Longitudinal and 1st Lateral	145.5	140.8	3.23
1st Lateral Trunk	156.3	152.9	2.18
1st Vertical	164.6	167.4	-1.70
2nd Longitudinal and 1st Lateral	194.5	188.1	3.29
1st Longitudinal Trunk	208.3	196.0	5.90

**Tab. 4.5** Confronto tra frequenze proprie ottenute mediante analisi sperimentale e mediante analisi agli elementi finiti

L'errore percentuale sulle frequenze proprie risulta essere decisamente inferiore al 10% che si era definito come valore limite per una correlazione accettabile.

Nel futuro si prevede, per attività analoghe, di considerare la possibilità di eccitare la cavità mediante sorgente omnidirezionale in più punti, o in più punti contemporaneamente, in maniera da ampliare la campagna sperimentale e migliorare la robustezza dei dati stessi. Dall'analisi e postprocessing dei dati sperimentali si è evidenziato come alcune frequenze proprie siano state poco eccitate e quindi si consiglia di verificare, caso per caso, l'efficacia del posizionamento della sorgente. Un ulteriore limite sperimentale che si è verificato è l'ingombro eccessivo della sorgente in rapporto al volume della cavità considerata.

Per quanto riguarda la parte relativa alla modellazione agli elementi finiti, la tecnica implementata permette di rappresentare in maniera corretta il comportamento dinamico della cavità acustica e risulta essere una base utile dalla quale partire per una caratterizzazione più dettagliata, necessaria per attività più complesse. In questa attività le superfici di contorno della cavità sono state considerate rigide ma una caratterizzazione acustica più esaustiva dei materiali di cui sono realizzate le finizioni è richiesta per stimare in maniera più accurata l'interazione del fluido con i componenti bagnati.



Un'interessante filone di ricerca interesserà lo studio della modellazione dei trafiletti e l'interazione della cavità principale con le cavità cosiddette "secondarie" (ad es. plancia, baule, porta, ...).

Ulteriori check di buona correlazione raggiunta e di robustezza delle analisi sperimentali effettuate sarà la simulazione numerica delle funzioni di trasferimento acustiche da sorgente a microfono. Tali simulazioni richiedono uno studio dettagliato della curva di smorzamento acustico considerato (costruita su base smorzamento modale) e di una conoscenza più precisa dell'interazione tra le cavità presenti in vettura e il comportamento fono-assorbente dei componenti direttamente coinvolti nella definizione del dominio volumetrico.

## **5. Valutazione del rumore di rotolamento di una vettura mediante analisi agli elementi finiti**

Il rumore di rotolamento ha due componenti principali: il rumore legato all'interazione tra pneumatico e pavimentazione stradale (*road noise*) e il rumore aerodinamico causato dal flusso d'aria intorno al veicolo (*aerodynamic noise*).

Generalmente il rumore prodotto esternamente da un veicolo nuovo, in condizioni di normale funzionamento, è dominato dal rumore legato al moto del veicolo su strada, che diventa sempre più importante all'aumentare della velocità di crociera del veicolo, superando il livello di potenza sonora legato al powertrain.

A bassa frequenza il *road noise* è un classico esempio di rumore che si trasmette per via strutturale: l'interazione tra il pneumatico e la pavimentazione stradale è la fonte delle vibrazioni che, trasmesse attraverso vari percorsi costituiti da combinazioni di componenti di sospensioni, telaio e pannelli della carrozzeria, giungono all'interno dell'abitacolo del veicolo.

L'obiettivo dell'attività è quello di fornire delle linee guida per effettuare una simulazione di rotolamento utilizzando un modello agli elementi finiti di una veicolo in configurazione *Trimmed-Body* mediante l'applicazione del metodo *Transfer Path Analysis* (TPA).

### **5.1. Transfer Path Analysis (TPA)**

Il metodo *Transfer Path Analysis* (TPA) è particolarmente usato nell'industria automobilistica per l'analisi di differenti contributi di rumore e/o vibrazione ad una particolare posizione del ricevitore (come ad esempio i punti di interfaccia uomo-vettura le posizioni delle orecchie del guidatore e passeggero) [44-45-46]. Il metodo mira ad identificare linee di propagazione dalle diverse fonti del rumore: strutturale ed aereo (ad esempio motore, cambio, aspirazione, scarico, pneumatici) usando un modello di relazione lineare carico-risposta. L'obiettivo è individuare i componenti lungo la linea di carico che hanno bisogno di essere modificati in maniera da risolvere uno specifico problema o di migliorare il design scegliendo delle caratteristiche ottimali per i suddetti componenti

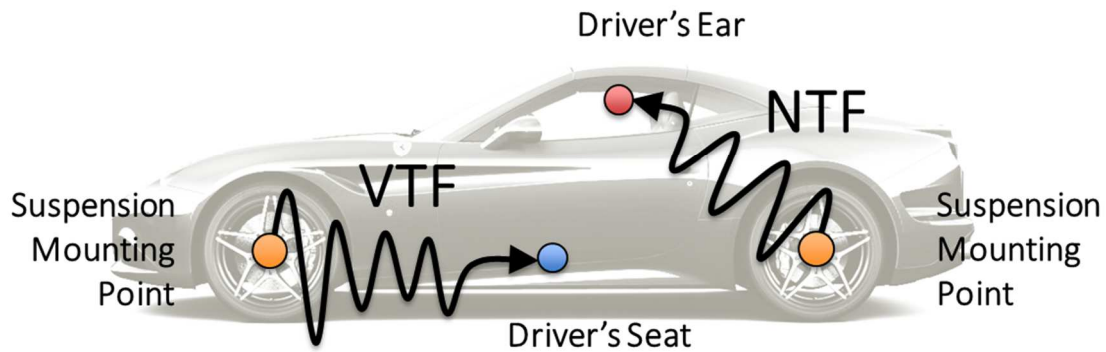
Il metodo della TPA classica identifica la funzione di risposta in frequenza (FRF) tra sorgente (input) e ricevente (output) usando un'eccitazione artificiale nota, come ad esempio uno shaker come sorgente vibratoria oppure un altoparlante come sorgente acustica, e misurando la risposta al ricevente. Le risultanti funzioni di risposta in frequenza sono univocamente determinate dalle proprietà del sistema lineare Multiple Input/Multiple Output (MIMO), che lega la risposta in output alla forza eccitante (propagazione strutturale) e/o la portata volumetrica (propagazione aerea) in input. E' importante notare che il metodo della TPA classica può anche essere applicato reciprocamente alla determinazione delle funzioni di risposta in frequenza; è quindi possibile applicare l'eccitazione nel punto di output e la risposta è misurata nella posizione della sorgente.

In alcuni casi non è possibile utilizzare uno shaker/altoparlante, e si utilizzano le forzanti operative per determinare la FRF. In questi casi, per determinare accuratamente la funzione di trasferimento, è necessario calcolare la forza in input tramite misurazioni e/o calcoli.

Una volta ottenuta la FRF, la risposta prevista al ricevente è calcolata moltiplicando la forza operativa per la FRF misurata. Assumendo una relazione lineare tra punto di eccitazione e punto di risposta, la risposta al ricevitore (livello di pressione sonora o vibrazione) è determinata da:

$$\mathbf{y}(j\omega) = \mathbf{H}(j\omega)\mathbf{x}(j\omega) \quad (5.1)$$

dove la risposta (o output),  $\mathbf{y}(j\omega)$  è legata all'input,  $\mathbf{x}(j\omega)$ , tramite la funzione di trasferimento  $\mathbf{H}(j\omega)$ . La dipendenza di fase e frequenza è indicata con  $j\omega$ . Da notare che nella TPA classica, la funzione di trasferimento tra input e output può essere denominata come Noise Transfer Function (NTF) e/o Vibration Transfer Function (VTF), come mostrato nella figura 5.1.



**Fig. 5.1** Esempi di VTF (Vibration Transfer Function) e NTF (Noise Transfer Function)

Per calcolare la risposta totale al ricevente, è necessario che tutte le linee di trasmissione del carico devono essere incluse nell'analisi. Ciò richiede che tutte le sorgenti di potenziale rumore e le relative linee di trasmissione devono essere misurate (ad esempio motore, trasmissione, scarico e aspirazione, gomme, etc.). La risposta totale (i.e. pressione sonora e/o vibrazione) al ricevente si configurerà come una sovrapposizione di tutti i contributi individuali ed è ottenuta sommando il contributo del prodotto di tutte le eccitazioni input per le corrispettive funzioni di trasferimento del carico, come descritto dalla seguente equazione:

$$y_m(j\omega) = \sum_{n=1}^N H_{mn}(j\omega)x_n(j\omega) \quad (5.2)$$

dove:

$y_m(j\omega)$  è la risposta al ricevente situato al punto  $m$ ;

$H_{mn}(j\omega)$  è la FRF tra il punto  $m$  e l'eccitazione in input applicata alla linea  $n$ ;

$x_n(j\omega)$  è la funzione di forza eccitante in input applicata alla linea  $n$ .

In generale, l'input è una forza ( $F_n$ ) oppure una portata volumetrica ( $Q_j$ ), e la risposta è una pressione sonora ( $p_m$ ) oppure una vibrazione ( $\ddot{x}_m$  per l'accelerazione). Qualora fossero considerati entrambi i carichi in input, acustico e strutturale, la risposta al ricevente sarebbe espressa nel seguente modo:

$$p_m(\omega) = \sum_{n=1}^N H_n(\omega)F_n(\omega) + \sum_{j=1}^r H_j(\omega)Q_j(\omega) \quad (5.3)$$

in cui:

$p_m(\omega)$  è la risposta (pressione sonora) al punto  $m$  del ricevitore;

$F_n$  è la forza in input, o il carico strutturale, al punto  $n$  (fonte di rumore trasmesso per via strutturale);

$H_n$  e  $H_j$  sono le corrispettive FRF.

Da notare che nell'equazione precedente i contributi di trasmissione per via aerea e per via strutturale sono trattati allo stesso modo. Per il metodo della TPA classica, la risposta misurata è tipicamente un suono oppure una vibrazione, e l'input è una forza. Per ragioni di semplicità, il metodo TPA trattato in questa attività si riferisce al caso di propagazione per via strutturale, trascurando gli effetti aerodinamici.

Le forze in input possono essere facilmente misurate utilizzando un trasduttore di forza quando la sorgente è uno shaker. Nei casi operativi, la possibilità di misurazioni dirette di forza è proibitivo per diversi motivi. Per ovviare a tali difficoltà si sono implementati metodi indiretti per determinare le forzanti operative.

Ci sono tre metodi che vengono comunemente utilizzati per determinare le forze in input. Il primo e più comune è chiamato *Complex Stiffness Matrix* ed è utilizzato quando la sorgente è montata sulla struttura attraverso connessioni molto morbide. Le forze sono ottenute misurando la differenza degli spostamenti monte-valle del tampone morbido, conoscendo la rigidità dinamica del tampone stesso nella direzione considerata. La formula utilizzata è la seguente:

$$F_n(\omega) = k_n(\omega)[x_{n1}(\omega) - x_{n2}(\omega)] \quad (5.4)$$

dove  $F_n(\omega)$  è la forza operativa trasmessa lungo la direzione  $n$ ,  $k_n(\omega)$  è la rigidità complessa per il tampone morbido nella direzione  $n$ ,  $x_{n1}(\omega)$  è lo spostamento per la direzione  $n$  sul lato della sorgente (monte),  $x_{n2}(\omega)$  è lo spostamento per la direzione  $n$  sul lato del ricevente (valle).

Il secondo metodo è chiamato *Matrix Inversion Method* ed è utilizzato quando i tasselli nei punti di connessione sono rigidi e portano a spostamenti relativi tra monte e valle

tassello molto bassi o nulli, e quindi difficoltà nella misura degli spostamenti stessi. In questo metodo le forze sono determinate come indicato nella formula seguente:

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ \dots \\ F_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{11} & \dots & H_{1N} \\ \dots & \dots & \dots \\ H_{M1} & \dots & H_{MN} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \dots \\ \ddot{x}_M \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

Il numero di output (ad es. il numero di punti di risposta),  $M$ , deve essere uguale o maggiore al numero di gradi di libertà delle forze,  $N$ , per evitare problemi numerici dovuti al calcolo della matrice inversa mal condizionata. Una ridondanza delle misure della risposta di un fattore due è usualmente utilizzata e migliora i risultati. Inoltre, la misura del rumore deve essere trattata con attenzione poiché può portare a risultati errati nel calcolo della matrice inversa.

Il terzo metodo è un metodo semplificato del *Matrix Inversion Method*. La forza per ogni grado di libertà è semplicemente stimata moltiplicando la funzione di trasferimento puntuale misurata per la risposta al ricevente:

$$F_i = H_{ij} \ddot{x}_j \quad (5.6)$$

dove:

$F_i$  è la forza in input stimata al punto  $i$ ;  $H_{ij}$  è la funzione di trasferimento della forza dal punto  $i$  al punto  $j$ ;  $\ddot{x}_j$  è l'accelerazione misurata al punto  $j$ .

Tale metodo sembra essere interessante per via della sua semplicità ma può portare a errori gravi nella stima delle forze soprattutto a bassa frequenza, dovuti all'interazione delle forze agenti ad altri gradi di libertà che saranno notevoli.

La risposta del sistema può essere determinata, come nell'attività in esame, tramite l'utilizzo di funzioni di trasferimento estratte da modelli numerici (ad es. modelli agli elementi finiti) e misure sperimentali.

La TPA classica utilizza tecniche che si limitano a misurare il trasferimento dei carichi di un sottosistema per volta. Ogni trasferimento di carico deve essere isolato in maniera tale da eliminare percorsi secondari. Ciò è fatto tipicamente smontando il sistema considerato per realizzare le misure. Il maggior svantaggio di avere disassemblato il sistema è aver

impiegato del tempo, aver cambiato le condizioni al contorno del sistema e rendere impossibile l'utilizzo della vettura durante le misure.

Tali svantaggi hanno portato ad una leggera modifica della TPA classica in quella che è chiamata Operational Transfer Path Analysis (OPTA). Mediante questo metodo è possibile identificare le funzioni di trasferimento dei carichi senza disallestire il sistema, utilizzare le forzanti operative e misurare contemporaneamente diversi sottosistemi

## **5.2. Metodologia per la valutazione del rumore di rotolamento**

Tradizionalmente i problemi NVH sono stati analizzati utilizzando l'approccio *Modal Analysis*. I modi di vibrare sono tipicamente associati ad una frequenza propria e una forma modale che forniscono indizi sul comportamento dinamico di una struttura.

Matematicamente, la risposta di una struttura può essere espressa come una somma di contributi dei suoi modi propri. Ciò permette di risolvere i problemi di rumore e vibrazione poiché in molti casi si agirà modificando i modi dominanti modificandone o tentando di modificarne le frequenze modali o le forme modali. Nei casi in cui la struttura risulta essere complessa e numerosi modi contribuiscono egualmente al problema, tale approccio non funziona e ciò accade generalmente per frequenze maggiori di 100 Hz (nel campo automotive).

La Transfer Path Analysis è stata sviluppata come metodo alternativo alla Modal Analysis per risolvere problemi vibro-acustici. La TPA è una tecnica che permette di comprendere una risposta vibro-acustica di una struttura individuando i contributi dominanti nella trasmissione del carico dall'interno o dall'esterno della vettura. Una volta individuati quali siano i contributi dominanti, il problema si sposta nel limitare tali linee di trasmissione. Si può concludere che la Modal Analysis basa la propria indagine sulle frequenze proprie della struttura, mentre la Transfer Path Analysis si focalizza sulla via di trasmissione del carico, quindi si presta meglio alla risoluzione di problemi ad alta frequenza (limitando il numero di paths da indagare).

Negli ultimi anni il metodo *Hybrid Transfer Path Analysis* (HTPA) si è diffuso notevolmente nel campo automotive. Si utilizza l'analisi agli elementi finiti per ottenere le funzioni di trasferimento o i carichi, e si combinano con i carichi o le funzioni di trasferimento sperimentali per valutare la vibrazione o il rumore interno alla vettura. Il

metodo HTPA permette di valutare gli effetti di una modifica strutturale all'interno del modello FEM e l'impatto di tale modifica sulla predizione della risposta vibro-acustica. Di seguito verranno discussi gli step fondamentali per utilizzare il metodo HTPA, considerando le forzanti come input esterno, fornito da attività sperimentali o simulazioni numeriche, e calcolando le funzioni di trasferimento dai punti di ingresso delle forze nel sistema vettura (input) ai punti di controllo della risposta vibro-acustica della vettura (output).

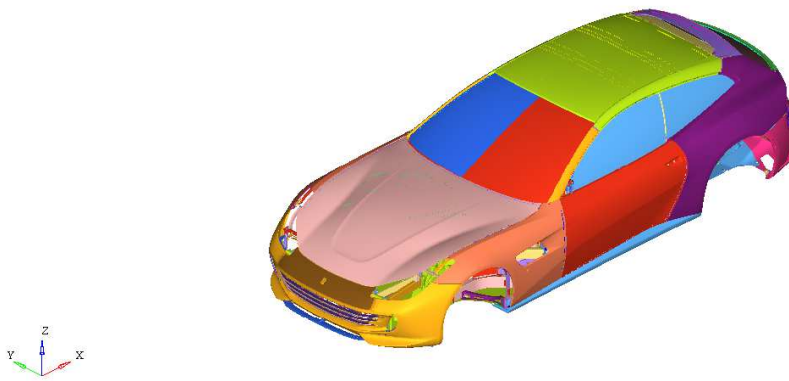
### **5.2.1. Vettura in configurazione Trimmed-Body (TB)**

Numerose configurazioni di vettura possono essere definite durante il processo di allestimento di un'automobile, basandosi sul tipo di allestimento e sui target specifici che devono essere soddisfatti ad ogni gate. Le differenti configurazioni possono differire a seconda degli standard aziendali e del segmento vettura ma si possono individuare le tre categorie principali per un veicolo:

- Body-in-White (BiW)
- Trimmed-Body (TB)
- Full-Vehicle (FV)

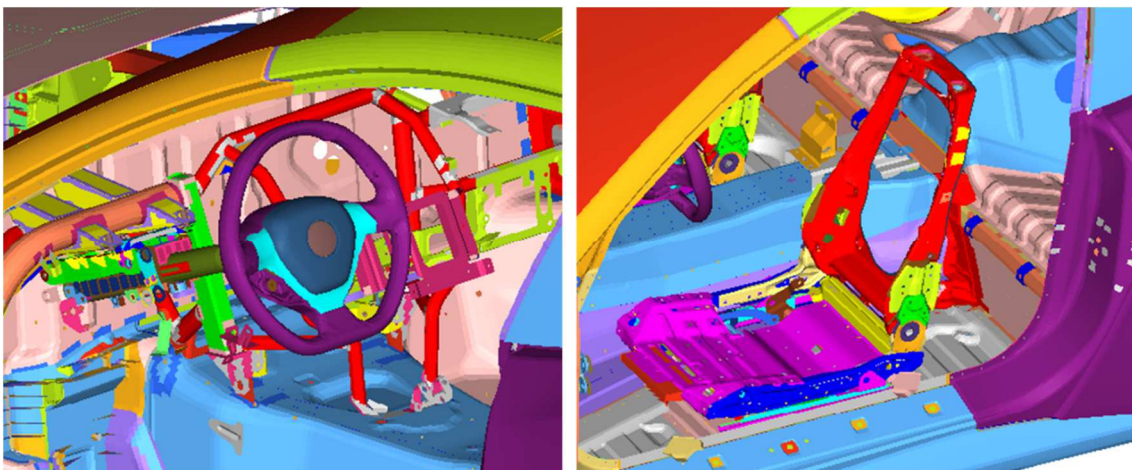
Secondo lo standard di Ferrari S.p.A., il BiW corrisponde alla scocca completa verniciata senza parti mobili, comprensiva di vetri, fondi, smorzanti e sigillanti. Il TB corrisponde all'allestimento successivo in cui al BIW vengono aggiunte le parti mobili, i sottosistemi principali (nello specifico piantone, volante, serbatoio, sistemi di raffreddamento, impianto elettrico e cablaggi, sedili, sistema di illuminazione, ...) eccetto la driveline e il gruppo sospensioni/ruote. Il FV, come è facile immaginare, rappresenta l'allestimento di vettura completa. Nella figura 5.2 è visualizzato il modello FEM in configurazione TB della Ferrari GTC4Lusso, che sarà oggetto dell'applicazione della metodologia.





**Fig. 5.2** Modello FEM in configurazione Trimmed-Body

Nelle figura 5.3 sono mostrati i sottosistemi piantone-volante e il sedile, che rappresentano l'interfaccia uomo-vettura, e sui quali vengono generalmente forniti i target di VTF sperimentali per il design di una vettura.



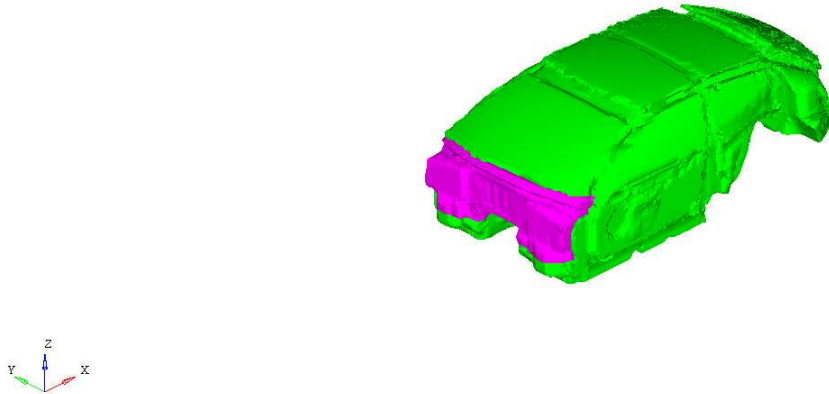
**Fig. 5.3** Sottosistemi di interfaccia uomo-vettura nel modello FEM

E' necessario quindi che il modello FEM rappresenti in maniera consistente il comportamento dinamico della vettura in configurazione TB. Affinché il modello agli elementi finiti risulti utile per queste applicazioni, è necessario intraprendere attività di correlazione numerico-sperimentale (come indicato nei capitoli precedenti). Tale aspetto verrà valutato criticamente in seguito all'interno del capitolo.

### **5.2.2. Cavità acustica e accoppiamento fluido-struttura**

La modellazione della cavità acustica è necessaria per indagare quali linee di trasmissione dei carichi causano problemi di eccessiva rumorosità all'interno dell'abitacolo. Come già

descritto in precedenza, la cavità acustica FEM deve essere rappresentativa del comportamento dinamico della cavità abitacolo in termini di frequenze proprie, di forme modali e di smorzamento acustico. Nella figura 5.4 è mostrato il modello FEM della cavità acustica della Ferrari GTC4Lusso.



**Fig. 5.4** Modello FEM della cavità acustica

Un aspetto che non va trascurato in questa fase è l'accoppiamento tra fluido e struttura. In letteratura è possibile trovare numerosi riferimenti a studi che hanno indagato tale accoppiamento. In questo caso verrà presentato il più semplice e pratico che prevede l'accoppiamento diretto tra fluido e struttura.

L'equazione su cui si basa un'analisi acustica è quella di variazione della pressione all'interno di un volume finito accoppiata con l'accelerazione delle pareti strutturali.

A tale equazione va accoppiata un'equazione di continuità tra i contorni affacciati del dominio fluido e di quello strutturale. Combinando tali equazioni si ottiene:

$$\frac{p}{\beta} - \frac{1}{\rho} (\nabla^2 p) = 0 \quad (5.7)$$

Si suppone di avere un dominio fluido affacciato ad un dominio solido (Figura 5.4).

Nel caso in cui l'input che turba lo stato di quiete del sistema è dovuto alla presenza di una sorgente acustica all'interno del fluido, il problema risulta essere formulato nella seguente maniera:

$$[M_f]\ddot{p} + [C_f]\dot{p} + [K_f]p + [A]\ddot{u} = S_f \quad (5.8)$$

in cui compaiono le matrici di massa, di smorzamento, di rigidità del fluido e il vettore dei carichi. La matrice  $[A]$  è la matrice di accoppiamento tra fluido e struttura.

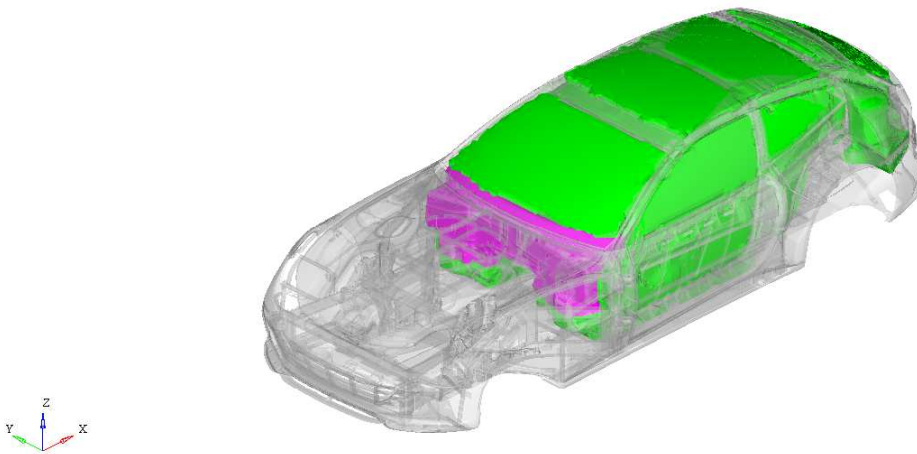
Analogamente, nel caso in cui la perturbazione sia di tipo strutturale, la stessa equazione si scrive come:

$$[M_s]\ddot{u} + [C_s]\dot{u} + [K_s]u + [A]^T p = S_s \quad (5.9)$$

in cui compaiono le matrici di massa, di smorzamento, di rigidità della struttura e il vettore dei carichi. La matrice  $[A]^T$  è la trasposta della matrice di accoppiamento tra il fluido e struttura.

L'unione delle due equazioni genera l'equazione dell'accoppiamento in cui compaiono tutte le grandezze incognite che vanno calcolate simultaneamente:

$$\begin{bmatrix} M_s & 0 \\ -A & M_f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{u} \\ \ddot{p} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_s & 0 \\ 0 & C_f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{p} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_s & A^T \\ 0 & K_f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_s \\ S_f \end{bmatrix} \quad (5.10)$$



**Fig. 5.5** Accoppiamento fluido-struttura tra il telaio della vettura (struttura) e la cavità acustica (fluido)

### 5.2.3. Calcolo delle funzioni di trasferimento VTF e NTF

Di seguito vengono riportati esempi di funzioni di trasferimento (figure 5.7 e 5.8) dai punti di attacco sospensione anteriore e posteriore (mostrati in figura 5.6) alla posizione “ore 12” del Volante in direzione Z. Le funzioni di trasferimento in questione sono le VTF e misurano la velocità in output a seguito di una forzante unitaria in input dimensionalmente sono definite come  $[(mm/s)/N]$ . Per motivi di segretezza industriale non vengono riportati i valori in ordinata nei grafici. Il solutore utilizzato per l'estrazione delle funzioni di trasferimento è Altair Optistruct 13.0 che è incluso nella suite Altair HyperWorks 13.0 [47].

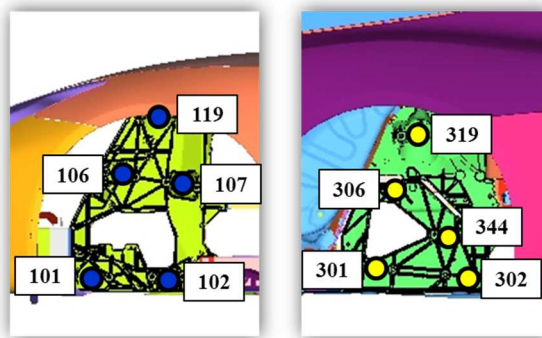
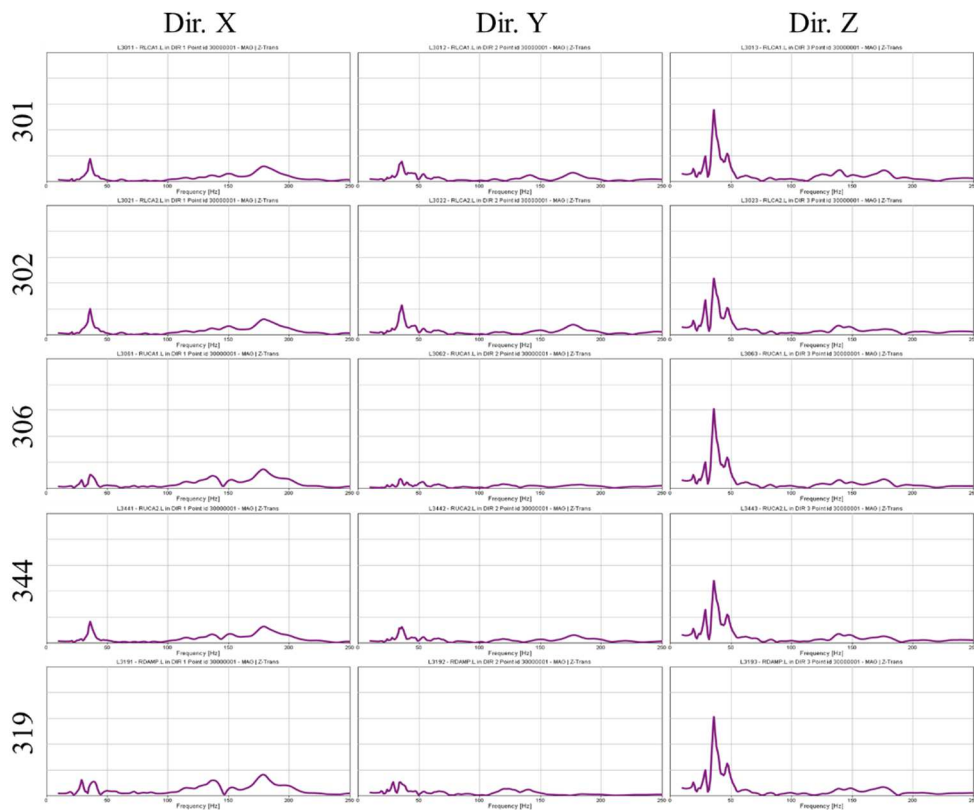
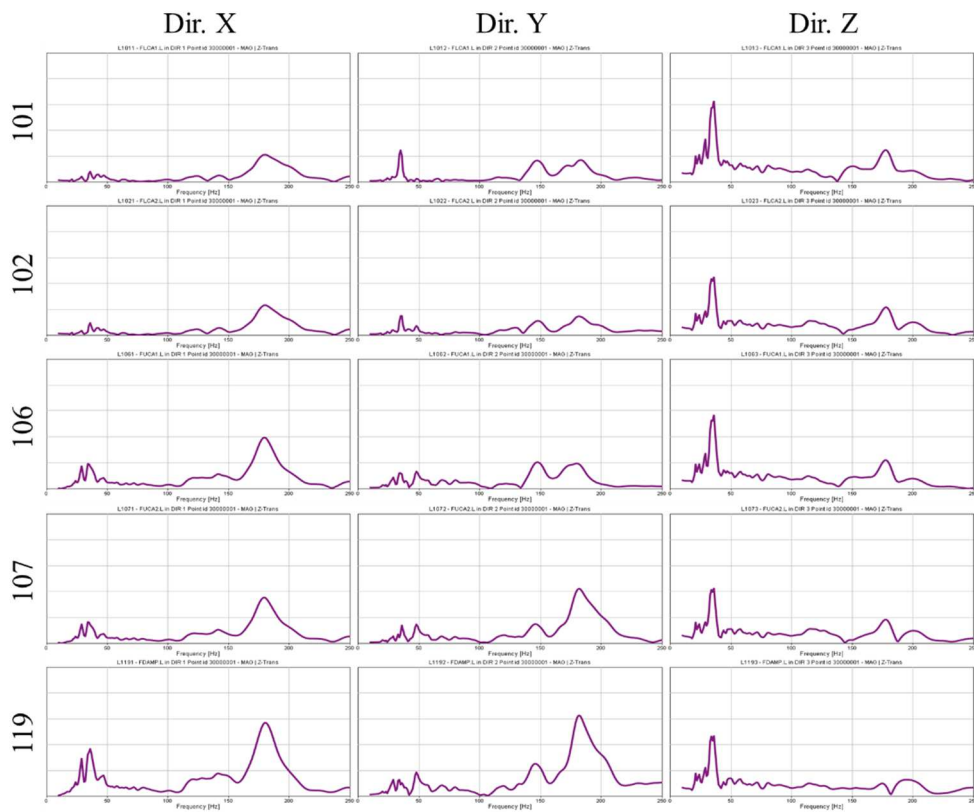
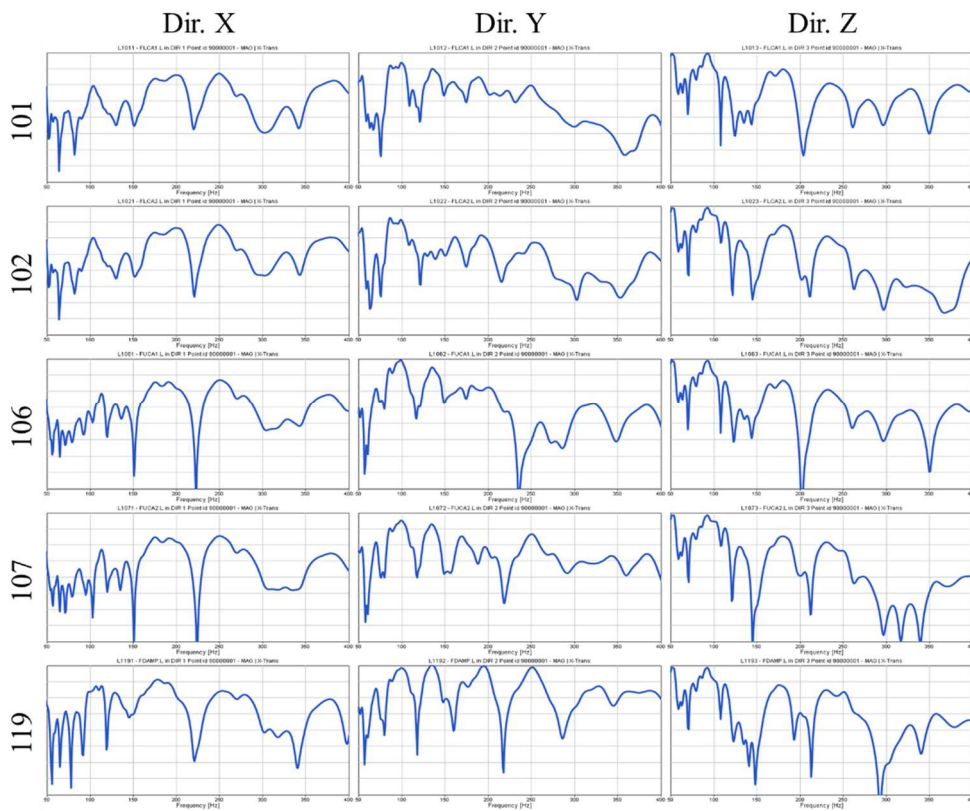


Fig. 5.6 Punti di attacco sospensione e relativo nodo di identificazione



Di seguito vengono riportati esempi (figure 5.9 e 5.10) di funzioni di trasferimento dai punti di attacco sospensione anteriore e posteriore (mostrati in figura 5.6) alla posizione dell'orecchio sinistro del guidatore. Le funzioni di trasferimento in questione sono le NTF e misurano la pressione sonora in output a seguito di una forzante unitaria in input dimensionalmente sono definite come  $(dB/N)$ . Per motivi di segretezza industriale non vengono riportati i valori in ordinata nei grafici.



**Fig. 5.9** NTF da sospensione anteriore a orecchio sinistro del guidatore

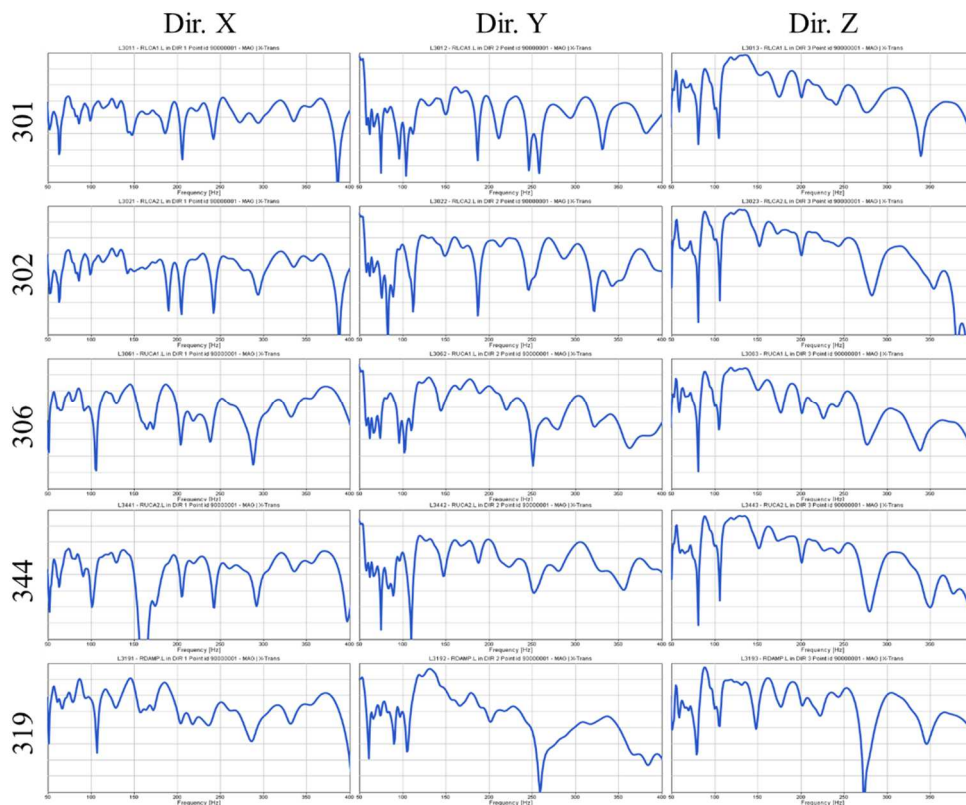
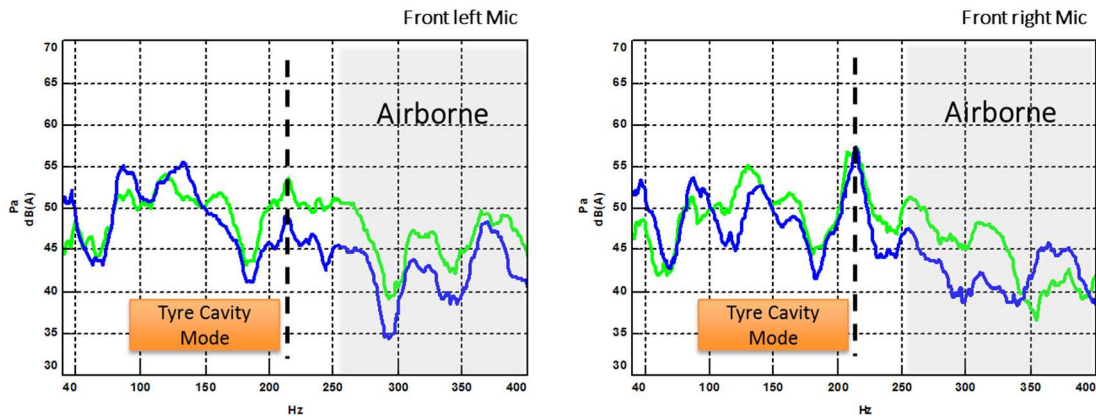


Fig. 5.10 NTF da sospensione posteriore a orecchio sinistro del guidatore

#### 5.2.4. Ricostruzione del Rumore di Rotolamento

La metodologia è stata applicata per la stima del rumore di rotolamento della vettura Ferrari GTC4Lusso, come mostrato nel paragrafo precedente. La manovra considerata è un passaggio a velocità costante (*cruise*) pari a 50 km/h su una superficie di tipo pavé. Le forze utilizzate come input sono state calcolate mediante una TPA classica realizzata dal team NVH Veicolo su una vettura prototipale. Nella figura 5.10 si può valutare la ricostruzione del rumore mediante una TPA puramente sperimentale rispetto ad un rilievo microfonico all'interno dell'abitacolo. Tale correlazione risulta essere un indice di affidabilità delle forzanti strada calcolate con una TPA sperimentale.



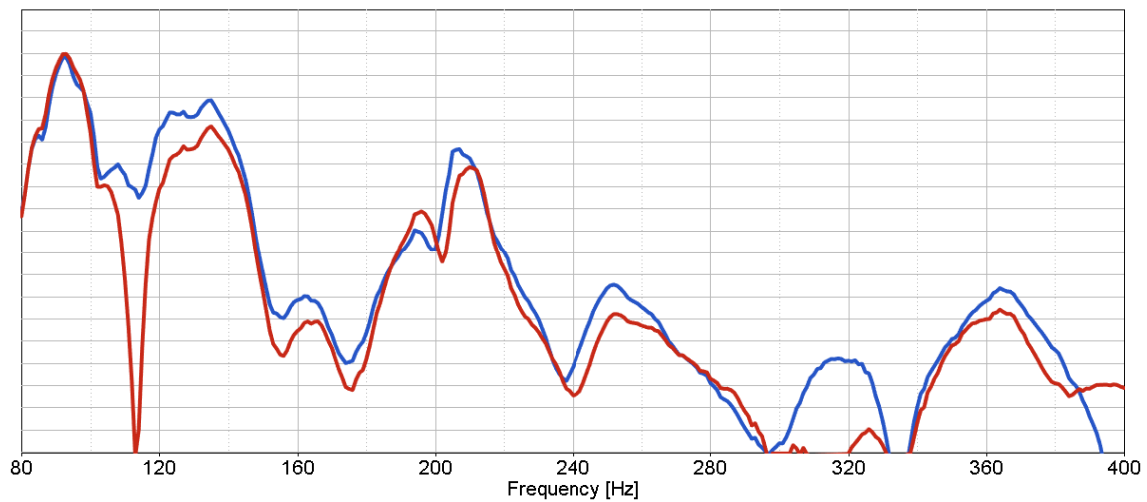
**Fig. 5.11** Correlazione tra misura sperimentale e TPA sperimentale

La curva verde rappresenta il rilievo microfonico all'interno della vettura (misura di riferimento); la curva blu rappresenta la ricostruzione del rumore di rotolamento mediante la TPA sperimentale. Si nota come per frequenze maggiori di 250 Hz il contributo del rumore air-borne risulta essere non trascurabile e influenza negativamente la ricostruzione della risposta all'orecchio del guidatore. La ricostruzione risulta essere piuttosto attendibile per le frequenze inferiori a 250 Hz e risulta essere migliore per quanto riguarda la pressione sonora all'orecchio destro del guidatore.

Le forze utilizzate nella TPA sperimentale verranno considerate come dato definitivo e la ricostruzione del rumore di rotolamento mediante la HTPA verrà effettuata moltiplicando le forzanti sperimentali per le rispettive funzioni di trasferimento calcolate mediante il metodo agli elementi finiti.

La ricostruzione del rumore di rotolamento (in dB) su superficie pavé a velocità costante pari a 50 km/h utilizzando il metodo *Hybrid Transfer Path Analysis* (HTPA) è mostrata in figura 5.12. Per motivi di riservatezza industriale non vengono riportati i valori in ordinata nei grafici.





**Fig. 5.12** Ricostruzione del rumore di rotolamento mediante HTPA

La possibilità di stimare a calcolo il rumore interno vettura per una determinata condizione di carico permette quindi di svolgere studi di dettaglio per valutare le funzioni di trasferimento dei carichi e ottimizzare il design della vettura in termini di performance vibro-acustiche.

Nella tabella 5.1 si sono classificati i contributi alla pressione sonora all'orecchio destro del guidatore per il caso analizzato nella sezione precedente. I valori dei contributi, espressi in *dB*, sono stati normalizzati rispetto al valore di pressione sonora target per ciascun contributo. La tabella evidenzia quindi quali sono le linee di trasmissione del carico da indagare per ridurre il rumore di rotolamento per il caso in esame.

<b>344 - Z</b>	<b>1.04</b>
<b>306 - Z</b>	<b>1.01</b>
<b>319 - Z</b>	<b>1.01</b>
<b>306 - X</b>	<b>0.99</b>
<b>302 - Y</b>	<b>0.99</b>
<b>301 - X</b>	<b>0.99</b>
<b>302 - Z</b>	<b>0.98</b>
<b>319 - X</b>	<b>0.96</b>
<b>119 - Z</b>	<b>0.92</b>
<b>344 - Y</b>	<b>0.91</b>
<b>319 - Y</b>	<b>0.91</b>
<b>306 - Y</b>	<b>0.90</b>
<b>106 - Z</b>	<b>0.89</b>
<b>301 - Y</b>	<b>0.88</b>
<b>119 - Y</b>	<b>0.88</b>
<b>302 - X</b>	<b>0.87</b>
<b>101 - X</b>	<b>0.86</b>
<b>102 - Z</b>	<b>0.84</b>
<b>107 - Y</b>	<b>0.82</b>
<b>102 - Y</b>	<b>0.81</b>
<b>101 - Z</b>	<b>0.80</b>
<b>106 - X</b>	<b>0.79</b>
<b>301 - Z</b>	<b>0.79</b>
<b>102 - X</b>	<b>0.78</b>
<b>107 - X</b>	<b>0.78</b>
<b>107 - Z</b>	<b>0.76</b>
<b>101 - Y</b>	<b>0.74</b>
<b>106 - Y</b>	<b>0.73</b>
<b>344 - X</b>	<b>0.68</b>
<b>119 - X</b>	<b>0.61</b>

**Tab. 5.1** Contributi al rumore di rotolamento

### 5.3. Ottimizzazione dello smorzante all'interno della vettura mediante HTPA

A seguito di un'attività di correlazione numerico-sperimentale sulle proprietà dinamiche del materiale smorzante applicato sui pannelli vettura, è stata definita una procedura per valutare e ottimizzare la distribuzione delle patch di smorzante in vettura.

L'attività di correlazione è stata svolta su una piastra in alluminio  $300 \times 300 \times 2.5$  mm ricoperta completamente da materiale smorzante di tipo *Asphaltic* spesso 3 mm. Tale componente è stato testato sperimentalmente in condizione free-free mediante impact testing (Figura 5.13).

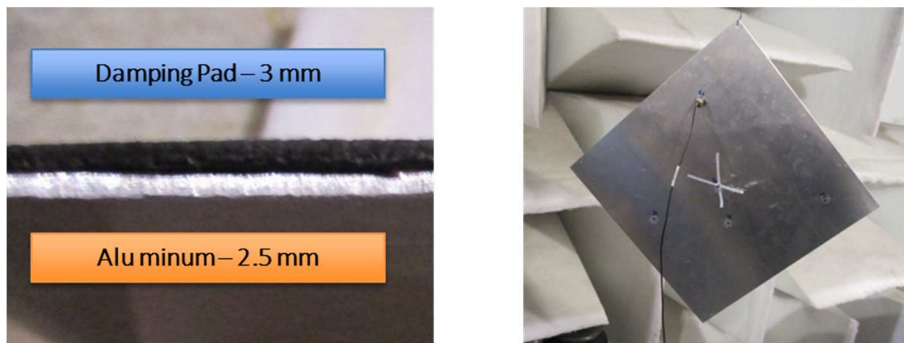


Fig. 5.13 Set-up del test sperimentale

Modificando iterativamente le proprietà di rigidità  $E$  e smorzamento  $GE$  della card material assegnata allo smorzante, è stato possibile ottenere una buona correlazione sulle FRF di mobilità, come mostrato in figura 5.14 e 5.15.

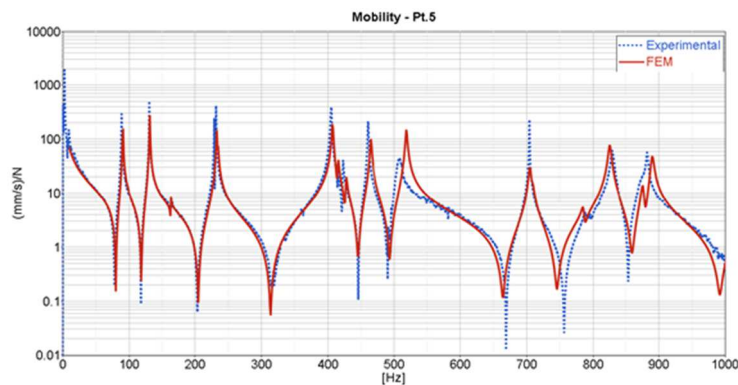
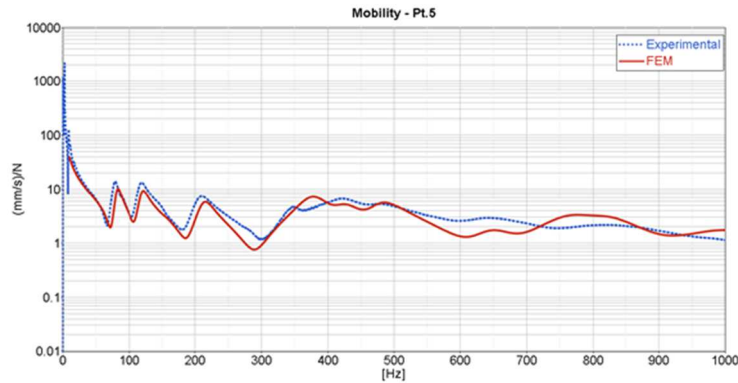


Fig. 5.14 Correlazione numerico-sperimentale della mobilità di un punto sulla piastra in alluminio senza smorzante



**Fig. 5.15** Correlazione numerico-sperimentale della mobilità di un punto sulla piastra in alluminio con smorzante

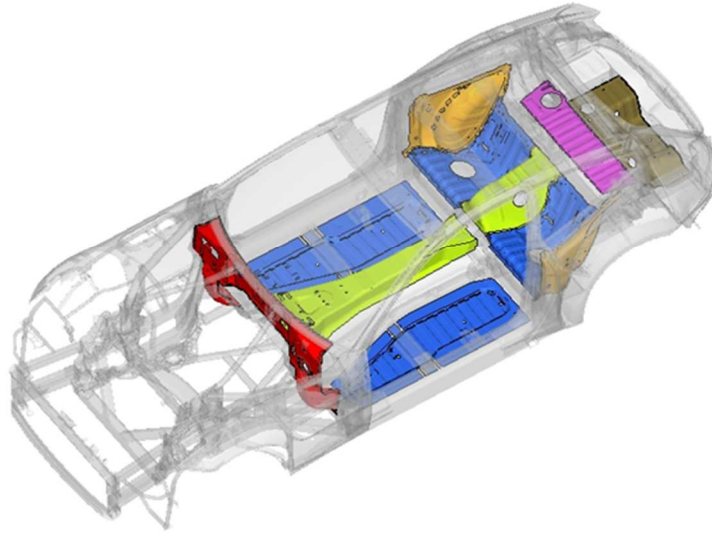
Tale attività ha permesso di validare sperimentalmente la card material utilizzata per modellare le patch di smorzante in vettura. Note le caratteristiche dello smorzante applicato sui pannelli vettura, è stato possibile valutare il comportamento vibroacustico dei pannelli in termini di potenza sonora irradiata sotto determinate condizioni di carico. Attraverso l'approccio HTPA è possibile classificare i pannelli in termini vibroacustici valutando l'*Equivalent Radiated Power* (ERP) di ciascun pannello. L'ERP è definito come segue:

$$ERP = LF \left( \frac{1}{2} c \rho \right) \sum A_i \cdot v_i^2 \quad (5.11)$$

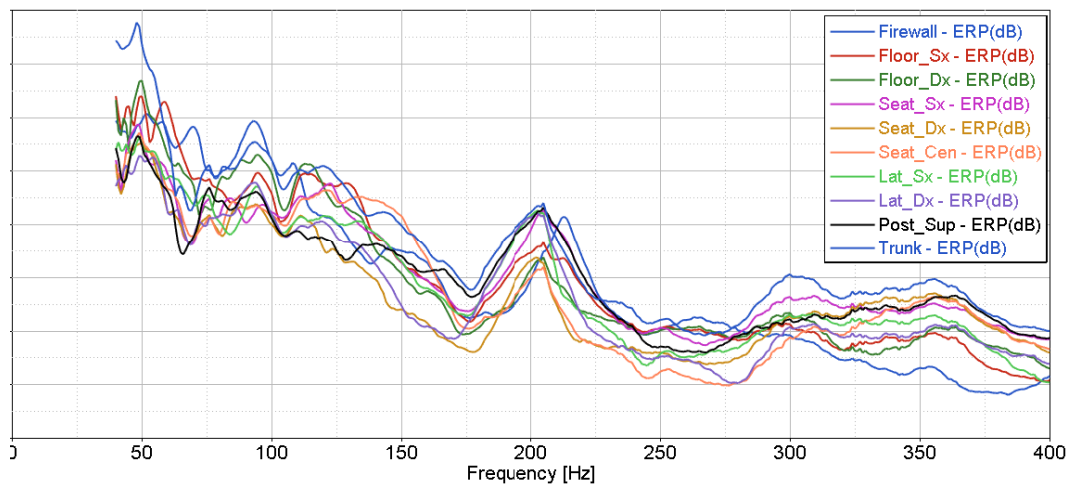
dove:

$c$  è la velocità del suono del fluido,  $\rho$  è la densità del fluido,  $LF$  è un fattore di perdita della potenza irradiata e  $v_i$  è la velocità del nodo  $i$ -esimo normale alla superficie  $A_i$

Un esempio di classificazione dei pannelli (riportati in figura 5.16) soggetti ai carichi dovuti al rotolamento a 50 km/h su superficie di tipo pavè è riportato in figura 5.16. Per motivi di segretezza industriale non vengono riportati i valori in ordinata nei grafici.



**Fig. 5.16** Pannelli considerati nella valutazione dell'ERP



**Fig. 5.17** ERP dei singoli pannelli soggetti input strada

Una procedura di ottimizzazione della distribuzione di smorzante è stata proposta ed è attualmente in fase di valutazione ed implementazione da parte del team CAE Veicolo in Ferrari S.p.A.

L'ottimizzazione proposta prevede di minimizzare il valore medio di ERP del pannello avendo come variabile di design la distribuzione dello smorzante sul pannello stesso (ottimizzazione di tipo free-size) e un vincolo sul peso dello smorzante stesso.

Tale ottimizzazione risulta essere molto onerosa dal punto di vista computazionale ed è in corso un'attività di ricerca che prevede l'applicazione di tale metodologia compatibilmente ad una riduzione dei tempi di calcolo.

## 5.4. Valutazione della metodologia e sviluppi futuri

Una volta completata la HTPA, è possibile classificare i vari contributi per una determinata risposta in output, identificandone quelli dominanti.

La HTPA può essere riassunta nei seguenti step:

- Definire le linee di trasferimento dei carichi/punti di attacco e il volume di controllo (Figura 5.18). Le forze da applicare in tali punti verranno calcolate o misurate (CAE/Sperimentazione).

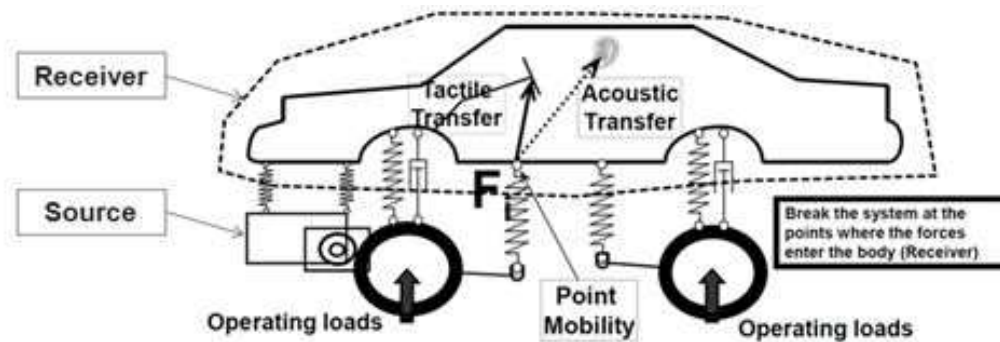


Fig. 5.18 Schematizzazione del sistema vettura per realizzare la TPA

- Calcolare le funzioni di trasferimento della struttura (Figura 5.19) considerando il sistema isolato (CAE)

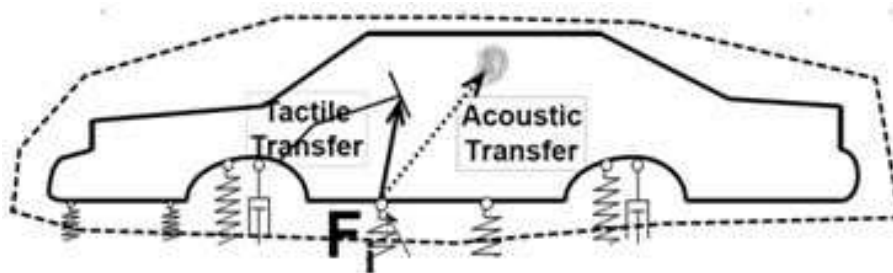


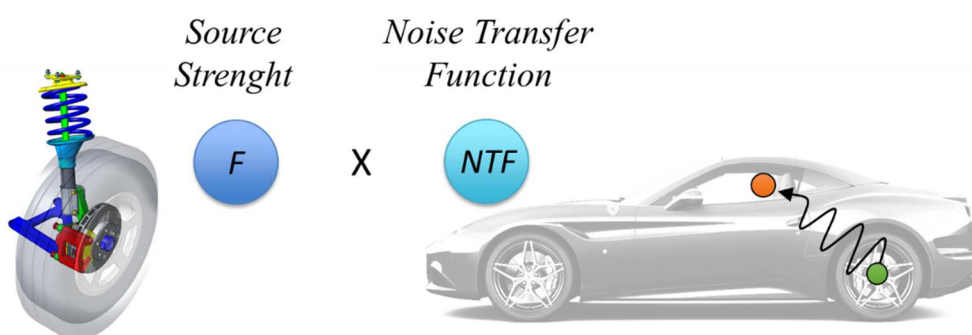
Fig. 5.19 Schematizzazione delle funzioni di trasferimento della vettura

- Realizzare la TPA completa sulla base della formula seguente e analizzare i risultati.

$$p_m(\omega) = \sum_{n=1}^N H_n(\omega) F_n(\omega) \quad (5.11)$$

dove  $p_m(\omega)$  è la risposta (pressione sonora) al punto  $m$  del ricevitore;  $F_n$  è la forza in input, o il carico strutturale, al punto  $n$  (fonte di rumore trasmesso per via strutturale) e  $H_n$  è la corrispettiva FRF.

Nella figura 5.20 viene riassunto il concetto base dell'intera metodologia che è stata proposta e utilizzata all'interno dell'attività di ricerca per la stima del rumore di rotolamento di una vettura.



**Fig. 5.20** Procedura per il calcolo dei singoli contributi

Mediante la HTPA si rende quindi possibile la classificazione delle forze, delle funzioni di trasferimento e anche delle risposte locali della struttura in maniera tale da comprendere quali fattori determinano i contributi maggiori in termini di vibrazione o rumore.

Per la realizzazione di una TPA corretta è necessario cogliere tutte le linee di trasferimento dei carichi dalla sorgente al ricevente. I *transfer paths* devono essere fisicamente comprensibili in maniera tale da capire e controllare le risposte alle quali si è interessati. E' quindi necessario limitare l'indagine alle linee di carico sufficienti alla ricostruzione della risposta.

Esistono tre possibili cause che determinano un alto indice di partecipazione di una determinata linea di trasferimento del carico:

- Funzione di trasferimento alta
- Forzante alta
- Mobilità locale alta

Nel primo caso si cerca di modificare la funzione di trasferimento riportandola all'interno del target definito a priori; nel secondo caso si devono modificare i rapporti di isolamento

nei tasselli di supporto; nel terzo caso bisogna migliorare la rigidità locale della struttura.



## 6. Conclusioni

Lo scopo del presente lavoro di tesi è stato quello di definire una metodologia di predizione e valutazione del rumore di rotolamento attraverso l'analisi agli elementi finiti. E' stata svolta un'attività di correlazione su un sottotelaio all'interno della quale si è implementata una nuova tecnica di modellazione della saldatura. Tale tecnica si basa sull'estensione del metodo ACM2 alle saldature continue di tipo MIG. Per quanto riguarda la parte relativa alla modellazione agli elementi finiti, la tecnica implementata permette di rappresentare in maniera corretta il comportamento dinamico della struttura e quindi risulta essere consistente sia in termini di rigidità che di massa. I test sperimentali e le analisi numeriche sono state comparate in maniera tale da validare la metodologia e un ottimo livello di correlazione è stata raggiunta monitorando parametri dinamici come le frequenze proprie e le forme modali.

I modi di cavità acustica di una vettura GT sono stati stimati analiticamente, misurati sperimentalmente e simulati numericamente in modo da valutare il comportamento acustico e le risonanze dell'abitacolo. E' stata raggiunta una buona correlazione fra test e simulazione comparando le forme modali.

Sono state fornite anche delle linee guida per effettuare una simulazione di rotolamento utilizzando un modello agli elementi finiti di una veicolo in configurazione *Trimmed-Body* mediante l'applicazione del metodo *Transfer Path Analysis* (TPA). Il metodo cosiddetto *Hybrid Transfer Path Analysis* (HTPA) utilizza l'analisi agli elementi finiti per ottenere le funzioni di trasferimento o i carichi, e si combinano con i carichi o le funzioni di trasferimento sperimentali per valutare la vibrazione o il rumore interno alla vettura. La HTPA implementata risulta essere un valido supporto alla fase di design e problem solving in ambito NVH. Le varie tecniche di Transfer Path Analysis (TPA) permettono di valutare degli scenari "what-if" dove carichi e trasferimenti di carichi possono essere manipolati e l'impatto di tali modifiche può essere valutato in breve tempo. Il metodo agli elementi finiti si integra perfettamente con la metodologia TPA permettendo agli ingegneri NVH di introdurre modifiche nel modello virtuale e valutare le prestazioni della vettura o del componente con un risparmio notevole di tempo e risorse. Il metodo mira ad identificare linee di propagazione dalle diverse fonti del rumore: strutturale ed aereo (come ad esempio i contributi da motore, cambio, aspirazione, scarico e pneumatici) usando un modello di relazione lineare carico-risposta. I limiti di tale

metodologia possono essere ritrovati nella formulazione analitica del metodo stesso. La relazione di tipo lineare input-output non prevede che possano insorgere fenomeni non lineari tra carico e risposta. Inoltre per una ricostruzione corretta della risposta è necessario che sia le forze sia le funzioni di trasferimento siano misurate/calcolate con accuratezza. L'affidabilità della valutazione della prestazione vibro-acustica nel caso dei modelli agli elementi finiti dipende fortemente dal livello di correlazione raggiunto nel comportamento dinamico del sistema virtuale rispetto alla realtà.

Dal punto di vista strutturale è necessario che il modello sia correlato con le misure sperimentali, effettuate sulla vettura in configurazione Body-in-White e Trimmed-Body. Una correlazione su base modale in bassa frequenza è necessaria ma non sufficiente a garantire una corretta predittività del comportamento vibroacustico del sistema al crescere della frequenza. E' quindi fondamentale intraprendere attività di correlazione sulle funzioni di trasferimento monitorate e sulle rigidità dinamiche nei punti nevralgici di ingresso dei carichi strada e powertrain. Grande attenzione va mostrata sul tema dello smorzamento. Nei modelli agli elementi finiti di grande complessità, come ad esempio nei modelli TB, si tende a sottovalutare gli effetti dovuti allo smorzamento in componenti non metallici, come ad esempio gli smorzanti o le schiume. Tali approssimazioni determinano una non corretta valutazione delle vibrazioni o del rumore poiché adottano modellazioni semplificate non rappresentative dell'effettivo comportamento dinamico dei componenti. Temi rilevanti risultano essere anche la caratterizzazione dal punto di vista modale dei sottosistemi in configurazione vettura e la corretta modellazione in termini di rigidità delle connessioni di tali sottosistemi al telaio. L'ampio utilizzo di elementi rigidi a masse concentrate (prive dei momenti di inerzia corretti) permette di ridurre notevolmente il tempo di calcolo ma spesso influenza negativamente il comportamento dinamico del sistema poiché non si è rappresentativi dei modi propri di vibrare del componente e di come il sottosistema interagisce con il telaio della vettura. Una corretta distribuzione di massa sul telaio inoltre è un requisito fondamentale per raggiungere un livello di correlazione soddisfacente; in particolare si deve prestare riguardo nell'utilizzo della massa non strutturale per compensare i disallineamenti di peso tra vettura reale e modello virtuale.

Dal punto di vista acustico un tema fondamentale da indagare è l'accoppiamento fluido struttura mediante materiali isolanti o fono-assorbenti. Tali materiali condizionano le

funzioni di trasferimento da struttura a fluido. La soluzione che prevede l'utilizzo di una curva di smorzamento acustico estratta da rilievi sperimentali risulta essere un buon compromesso globale ma che rischia di essere lacunosa quando si effettuano studi di dettaglio. Un focus particolare va dedicato all'interazione tra la cavità acustica principale e le cavità cosiddette "secondarie" (ad es. il baule). La presenza di trafiletti o di connessioni aeree influenza il comportamento acustico della cavità e può influenzare negativamente la correlazione nelle funzioni di trasferimento acustiche.

Indipendentemente da questa analisi critica sui modelli agli elementi finiti e sulla loro capacità predittiva va evidenziato che le attività di correlazione numerico sperimentale devono prevedere delle campagne di test sperimentali robuste. Spesso la correlazione uno a uno è difficile o pressoché impossibile da raggiungere poiché i test sperimentali sono anch'essi affetti da errori e le misure possono essere non ripetibili da componente a componente. Una sinergia di intenti tra simulazione numerica e testing sperimentale è sempre auspicabile poiché entrambi possono beneficiare di una correlazione più accurata: tali attività a volte sono difficilmente compatibili con le necessità aziendali, in quanto richiedono tempo e competenze, ma a lungo termine portano un vantaggio in termini di target setting e problem solving.

## **Bibliografia**

- [1] Morello, L., Rosti Rossini, L., Pia, G., Tonoli, A., The Automotive Body Volume I: Components Design - ISSN 0941-5122, ISBN 978-94-007-0512-8, doi 10.1007/978-94-007-0513-5, Springer Dordrecht Heidelberg London New York
- [2] Morello, L., Rosti Rossini, L., Pia, G., Tonoli, A., The Automotive Body Volume II: System Design - ISSN 0941-5122, ISBN 978-94-007-0515-9, doi 10.1007/978-94-007-0516-6, Springer Dordrecht Heidelberg London New York
- [3] Wang, X., Vehicle noise and vibration refinement - Woodhead Publishing Limited, 2010, Oxford Cambridge, New Dehli
- [4] Harrison, M., Vehicle refinement Controlling Noise and Vibration in Road Vehicles, Elsevier Butterworth-Heinemann, Linacre House, Jordan Hill, Oxford OX2 8DP
- [5] Gambino, C., Vibration Damping Via Acoustic Treatment Attached To Vehicle Body Panels (2015). Electronic Theses and Dissertations. Paper 5268.
- [6] Biot, M.A., Mechanics of Deformation and Acoustic Propagation in Porous Media, Journal of Applied Physics 33, 1482 (1962); doi: <http://dx.doi.org/10.1063/1.1728759>
- [7] Wilson, E. and Huber, P., "Passenger-Car Road Noise," SAE Technical Paper 390156, 1939, doi:10.4271/390156.
- [8] Pang, J., Shen, G., He, H., Automotive Noise and Vibration – Principle and Application. Beijing Institute of Technology Press. 2006.
- [9] Shivle, S. and Arora, G., "Methodology of Road Noise Analysis and Improvement Strategy for Passenger Cars," SAE Technical Paper 2006-01-1094, 2006, doi:10.4271/2006-01-1094.

- [10] Yorozu, N., Fukuhara, C., Kamura, T., Absorption Technique for Road Noise[J]. SAE paper, 2009-01-0020.
- [11] Kido, I. and Ueyama, S., Coupled Vibration Analysis of Tire and Wheel for Road Noise Improvement[J]. SAE paper, 2005-01-2525.
- [12] Waisanen A., Blough, J., Road Noise TPA Simplification for Improving Vehicle Sensitivity to Tire Cavity Resonance Using Helium Gas[J].SAE paper: 2009-01-2092.
- [13] Yu, X., Pang, J., Min, F., Wen, W., Gong, S., Structural transfer path analysis of automobile tire/road noise, 2014, Internoise 2014, 16-19 November, Melbourne
- [14] Dubbaka, K., Zweng, F., and Haq, S., "Application of Noise Path Target Setting Using the Technique of Transfer Path Analysis," SAE Technical Paper 2003-01-1402, 2003, doi:10.4271/2003-01-1402.
- [15] Koners, G., "Panel Noise Contribution Analysis: An Experimental Method for Determining the Noise Contributions of Panels to an Interior Noise," SAE Technical Paper 2003-01-1410, 2003, doi:10.4271/2003-01-1410.
- [16] Gehringer, M., "Application of Experimental Transfer Path Analysis and Hybrid FRF-Based Substructuring Model to SUV Axle Noise," SAE Technical Paper 2005-01-1833, 2005, doi:10.4271/2005-01-1833. 11.
- [17] Kim, S., Inoue, A., and Singh, R., "Experimental Study of Structure-Borne Noise Transfer Paths over the Mid-Frequency Regime," SAE Technical Paper 2005-01-2338, 2005, doi:10.4271/2005-01-2338.
- [18] Surkutwar, Y., Ramkumar, R., Luktuke, A., Ramachandran, E. et al., "Transfer Path Analysis and Synthesis Using DOE Approach Based on Finite Element Analysis (FEA) and Experimental Techniques," SAE Technical Paper 2013-26-0088, 2013, doi:10.4271/2013-26-0088.

- [19] Bartolozzi, G., Danti, M., Nierop, G., and Camia, A., "Simplified FE Modeling of Rolling Tires for the Simulation of Dynamic Forces at Hub Level," SAE Technical Paper 2015-01-2194, 2015, doi:10.4271/2015-01-2194.
- [20] Bartolozzi, G., Danti, M., Camia, A., and Vige, D., "Enhancement of Full-Vehicle Road Noise Simulation Including Detailed Road Surface and Innovative Tire Modeling," SAE Int. J. Passeng. Cars - Mech. Syst. 9(3):1091-1099, 2016, doi:10.4271/2016-01-1827.
- [21] Baker, M.. Review of Test/Analysis Correlation Methods and Criteria for Validation of Finite Element Models For Dynamic Analysis, Proceedings of the 10th International Modal Analysis Conference, San Diego, California, February 3-7. 1992.
- [22] Imregun, M.. and Visser, W.J., A Review of Model Updating Techniques, Shock and Vibration Digest, Vol. 23. No. 1. pp. 141-162. September 1990.
- [23] Friswell M.I., Mottershead J.E. (1995) "Finite element model updating in structural dynamics. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- [24] Brughmans, M., Leuridan, J., Van Langenhove, T., and Turgay, F., Validation of Automotive Component FE Models by Means of Test-Analysis Correlation and Model Updating Techniques, SAE Technical Paper 1999-01-1797, 1999, doi:10.4271/1999-01-1797.
- [25] Jambovane, S., Kalsule, D., and Athavale, S., "Validation of FE Models Using Experimental Modal Analysis," SAE Technical Paper 2001-26-0042, 2001, doi:10.4271/2001-26-0042.
- [26] Siano, D., Viscardi, M., Napolitano, P., Panza, M. A., Experimental/FE Numerical Correlation of a Composite Sandwich Panel of a High-Speed Train, Proceedings of the 10th International Conference on Applied and Theoretical Mechanics (MECHANICS '14), ISBN: 978-960-474-377-3.

- [27] Splendi, L., D'Agostino, L., Baldini, A., Castignani, L., Pellicano, F., Pinelli, M., Simplified modeling technique for damping materials on light structures: Experimental analysis and numerical tuning, IMECE 2013; San Diego, CA; United States; 10.1115/IMECE2013-64542.
- [28] Schedlinski, C., Wagner, F., Bohnert, K., Frappier, J., Irrgang, A., Lehmann, R., Müller, A., Test-Based Computational Model Updating of a Car Body in White, Sound and Vibration; Volume 39/Number 9; September 2005.
- [29] Mariano, S., da Silva, M., da Costa Moreira, A., de Barros, E. et al., "Modal Correlation of an Aerospace Structure," SAE Technical Paper 2006-01-2786, 2006, doi:10.4271/2006-01-2786.
- [30] C. Azoury, A. Kallassy, B. Combes, I. Moukarzel, R. Boudet, Experimental and Analytical Modal Analysis of a Crankshaft, IOSR Journal of Engineering, Vol.2(4), Apr-2012 ISSN 2250-3021. pp. 674-684.
- [31] Schwarz, B.J. and Richardson, M.H., Experimental Modal Analysis, Proceedings of the CSI Reliability Week, Orlando, FL (1999)
- [32] Peeters, B., Guillaume, P., Van der Auweraer, H., Caubergue, B., Verboven, P. and Leuridan, J. (2004). Automotive and aerospace applications of the PolyMAX Modal Parameter Estimation Method. 22<sup>nd</sup> International Modal Analysis Conference, Dearborn, January 2004, 17-21.
- [33] Aygül, M., (2012) Fatigue analysis of Welded Structures Using the Finite Element Method, Licentiate of Engineering Thesis, Dept. of Civil and Environmental Engineering, Chalmers University of Technology, Sweden.
- [34] Heiserer D., Charging M., Sielaft J., High performance, process oriented, weld spot approach, First MSC Worldwide Automotive User Conference, Munich, Germany, September 1999.

- [35] Palmonella M., Friswell M., Mottershead J., Lees A., Finite element models of spot welds in structural dynamics: review and updating, *Computers and Structures* 83 (2005) 648-661.
- [36] Niemi, E., - Stress determination for fatigue analysis of welded components, IIW, 1995
- [37] Ericsson M, Sandstrom R (2003) Influences of welding speed on the fatigue of friction stir welds and comparison with MIG and TIG. *Int J Fatigue* 25:1379–1387
- [38] Allemang, R.J, Brown, D.,L., A correlation coefficient for modal vector analysis, 1st International Modal Analysis Conference, Orlando, Florida, 1982:110–6.
- [39] Allemang, R. J., The modal assurance criterion (MAC): twenty years of use and abuse, *Proceedings of IMAC 20, the International Modal Analysis Conference, Los Angeles, CA, U.S.A. (2002)*, pp. 397–405.
- [40] Yoshimura, T., Saito, M., Maruyama, S., Iba, S., Modal analysis of automotive cabin by multiple acoustic excitation. *Proc. ISMA, Leuven (2012)*.
- [41] Peeters, B., El-kafafy, M., Accardo, G., Knechten, T., Janssens, K., Lau, J., Gielen, L., “Automotive Cabin Characterization by Acoustic Modal Analysis,” *Proceedings of JSAE Spring Annual Conference, 114-20145437, 2014*.
- [42] Cherng, JG, Yin, G, Bonhard, RB, French, M, Characterisation and Validation of Acoustic Cavities of Automotive Vehicles, *Society of Photo-optical Instrumentation Engineers 2002; vol. 1, pp 290-294*
- [43] Pietrzyk A, Bengtsson T. An investigation of the coupling between the passenger compartment and the trunk in a sedan. *SAE paper 2007-01-2356, 2007*



[44] de Klerka, D., Ossipovc, A., Operational transfer path analysis: Theory, guidelines and tire noise application, *Mechanical Systems and Signal Processing*, Volume 24, Issue 7, October 2010, Pages 1950–1962

[45] Toome, M., Operational Transfer Path Analysis, A Study of Source Contribution Predictions at Low Frequency, Master's Thesis in the Master's programme in Sound and Vibration, Department of Civil and Environmental Engineering, Chalmers University of Technology, Göteborg, Sweden 2012

[46] Wyckaert, K. and Van der Auweraer, H., "Operational Analysis, Transfer Path Analysis, Modal Analysis: Tools to Understand Road Noise Problems in Cars," SAE Technical Paper 951251, 1995, doi:10.4271/951251.

[47] Altair Engineering, Inc (2014) OptiStruct 13.0 User's Guide, Troy, MI.

[48] Free Field Technologies (2016) Actran 14.0 User's Guide, Brussels, BE.

## Appendice A – Richiami di teoria

### A.1 Il Rumore

Il suono talvolta ha delle caratteristiche tali da generare in chi lo percepisce sensazioni fastidiose che possono provocare fenomeni d'insofferenza: in questi casi si parla di *rumore*.

Negli ultimi anni l'attenzione verso i problemi legati alla rumorosità e alle vibrazioni presenti nei veicoli per autotrazione è cresciuta in termini di comfort e guidabilità. Infatti, se da un lato il cliente finale è diventato più consapevole dei rischi legati al rumore e alle vibrazioni, la legislazione è intervenuta introducendo severe limitazioni al fine di proteggere le persone dagli effetti dannosi di una prolungata esposizione ad elevati livelli di rumore e di vibrazioni.

Il legame che esiste tra rumore e vibrazioni è molto forte. Infatti un suono può essere prodotto soltanto in due modi o attraverso la vibrazione di oggetti solidi o attraverso la turbolenza dell'aria. Pertanto, da un punto di vista più ingegneristico si capisce, quindi, come sia naturale affrontare il problema della riduzione del rumore emesso da un sistema analizzando il comportamento del sistema stesso sotto l'aspetto delle vibrazioni in esso presenti.

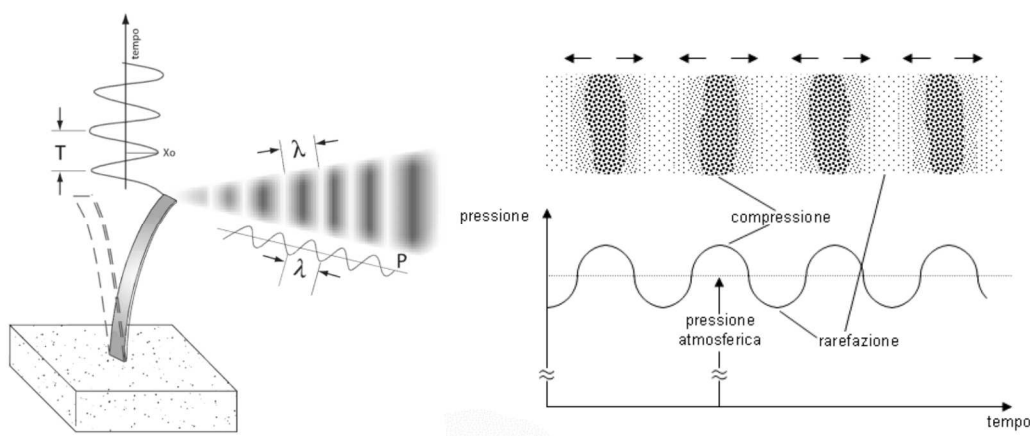
In questo capitolo, dopo aver esposto alcuni concetti di base dell'acustica e delle vibrazioni, saranno descritte le problematiche legate al rumore e alle vibrazioni negli autoveicoli, facendo particolare attenzione alle problematiche connesse con i motori a combustione interna.

- **Il suono e le grandezze acustiche**

Il suono è caratterizzato dalla propagazione di onde di pressione in un mezzo elastico dovute alla rapida successione di compressioni ed espansioni del mezzo stesso, a causa della presenza di un elemento vibrante. La frequenza e la velocità con la quale si propaga il disturbo di pressione dipendono dallo stesso mezzo elastico, che può essere solido, liquido o aeriforme.

Quando un elemento vibra in un mezzo elastico come l'aria, anche le particelle del mezzo circostante cominciano ad oscillare attorno alla loro posizione di equilibrio e, nel volume d'aria circostante la sorgente sonora, si producono delle variazioni estremamente piccole

di pressione (dell'ordine di  $10^{-5} \div 10^2$  Pa). Le onde sonore diffondendosi nel mezzo, producono una variazione nella densità del mezzo stesso e ciò provoca delle variazioni di pressione rispetto alla condizione di equilibrio: a una certa distanza dalla sorgente sonora si manifestano, pertanto, variazioni della pressione al di sopra (compressioni) e al di sotto (espansioni della pressione atmosferica ( $p_{\text{atm}}=1.013 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ ), come schematizzato nella Figura A.1.



**Fig. A.1** Schematizzazione delle onde di pressione prodotte da una sorgente sonora

Quando le onde di pressione raggiungono l'orecchio umano, la membrana del timpano comincia a vibrare e, attraverso un complesso sistema di impulsi nervosi, vengono percepite dal cervello dando origine alla sensazione uditiva.

Uno dei parametri che caratterizza il suono è la *frequenza*  $f$ , essa rappresenta il numero di oscillazioni effettuate in un secondo. Si parla di *fenomeno sonoro* quando la frequenza è compresa nell'intervallo  $20 \text{ Hz} \div 20.000 \text{ Hz}$ , ovvero l'intervallo in cui si assume convenzionalmente che l'orecchio umano sia sensibile. I segnali aventi frequenze inferiori ai  $20 \text{ Hz}$  sono detti infrasuoni, mentre i segnali al di sopra dei  $20.000 \text{ Hz}$  sono detti ultrasuoni.

Generalmente un suono non corrisponde ad un tono puro, caratterizzato da una sola frequenza di emissione, ma da un segnale complesso costituito da un grande numero di frequenze che danno origine ad uno spettro continuo.

Altri parametri fisici necessari per la descrizione dei fenomeni acustici sono il *periodo*  $T$  e la *lunghezza d'onda*  $\lambda$  che rappresentano, rispettivamente, l'intervallo di tempo e lo spazio necessari per poter compiere un'oscillazione completa.

Le relazioni che intercorrono tra i suddetti parametri sono:

$$f = \frac{1}{T} \quad (\text{A.1})$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (\text{A.2})$$

$$\lambda = \frac{c}{f} \quad (\text{A.3})$$

$$\lambda = cT \quad (\text{A.4})$$

dove  $\omega=2\pi f$  è la pulsazione e  $c$  è la velocità del suono nel mezzo. Tale velocità non dipende dalla frequenza dell'oscillazione, ma solo dalle condizioni termodinamiche del mezzo in cui la perturbazione si propaga. Per l'aria esistono delle formule approssimate che permettono di determinare il valore della velocità del suono in funzione della sola temperatura:

$$c \cong 20.05\sqrt{T} \quad (\text{A.5})$$

dove  $T$  è la temperatura assoluta in Kelvin

$$c \cong 331.4 + 0.6t \quad (\text{A.6})$$

dove  $t$  è la temperatura in °C

- **Pressione, potenza e intensità sonora**

Le grandezze fisiche fondamentali in acustica sono la pressione, la potenza e l'intensità sonora.

Si definisce *pressione sonora istantanea*  $p_i$ , in un punto e in un dato istante, la variazione di pressione atmosferica prodotta dal fenomeno sonoro rispetto alla pressione statica  $p_{\text{atm}}$  relativa al mezzo non perturbato, cioè:

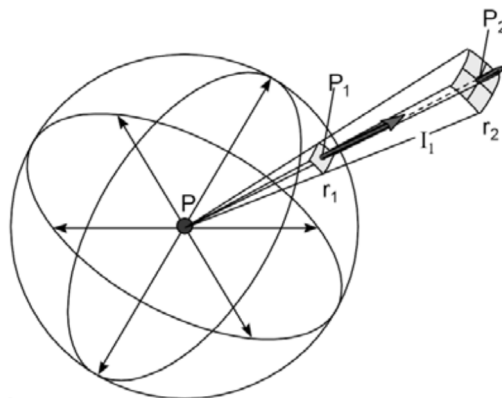
$$p - p_{atm} = p_i \quad (\text{A.7})$$

dove  $p$  e  $p_{atm}$  rappresentano rispettivamente i valori della pressione esistente nel mezzo in presenza e in assenza dell'onda sonora.

Normalmente la pressione sonora assume valori molto piccoli rispetto alla pressione statica e per questo motivo si tende a caratterizzare la pressione sonora  $p_i$  attraverso il suo valore efficace, pari alla radice quadrata del valore quadratico medio:

$$p_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T p_i^2 dt} \quad (\text{A.8})$$

Nel caso di una sorgente puntiforme e omnidirezionale, posta in un mezzo isotropo come l'aria, l'energia s'irradia nello spazio in modo uniforme, quindi al variare della direzione si avrà una propagazione per onde sferiche. Misurando la variazione della pressione atmosferica causata dalla perturbazione, si noterà che essa diminuisce di ampiezza man mano che ci si allontana dalla sorgente perché l'energia si distribuisce su una superficie di emissione sempre maggiore (*fronte d'onda*). In una posizione qualsiasi dello spazio si può allora descrivere il campo acustico con una grandezza caratterizzata da direzione, verso e ampiezza che rappresenta la quantità di energia che fluisce attraverso l'unità di superficie  $S$  nell'unità di tempo. Questa grandezza è detta *intensità sonora* ed è misurata in  $\text{W/m}^2$ .



**Fig. A.2** Propagazione per onde sferiche di una sorgente puntiforme

Nel caso di onde piane in un mezzo elastico non viscoso, si ottiene:

$$I = \frac{p_{eff}}{\rho c} \quad (A.9)$$

Si osservi che l'intensità sonora è una grandezza vettoriale, dipendendo dalla direzione della superficie considerata.

L'energia sonora che la sorgente acustica è in grado di irradiare nell'unità di tempo è detta *potenza sonora P*.

Per onde piane in mezzi in quiete non viscosi, vale:

$$P = IS \quad (A.10)$$

La potenza sonora è una grandezza scalare e viene misurata in watt.

La pressione sonora non solo è il parametro più appropriato per valutare l'effetto della presenza di un suono, ma è anche la grandezza fisica più comunemente misurata, in quanto la variazione di pressione atmosferica è una quantità relativamente semplice da rilevare. Tuttavia, usando una scala lineare come il Pascal per la misura della pressione sonora, il range dei valori dell'udibile è molto ampio: si passa da un valore di soli 20  $\mu\text{Pa}$  corrispondente al livello minimo percettibile dall'orecchio umano, a un valore di poco superiore ai 100 Pa corrispondente alla soglia del dolore. Per risolvere i problemi legati all'utilizzo di tale scala, si preferisce esprimere i parametri acustici in funzione di una scala relativa di tipo logaritmico, per cui il valore di un dato parametro viene rapportato ad un dato valore di riferimento e il suo valore viene espresso in decibel (dB). I parametri acustici così espressi sono grandezze adimensionali, convenzionalmente definiti *livelli*. Pertanto, il livello della pressione sonora  $L_p$  è definito mediante la relazione:

$$10 \log \frac{p^2}{p_0^2} = 20 \log \frac{p}{p_0} \quad [dB] \quad (A.11)$$

dove  $p$  è il valore efficace della pressione sonora (misurato in Pa) del suono in esame e  $p_0$  è la pressione sonora di riferimento pari a  $2 \cdot 10^{-5}$  Pa che corrisponde alla soglia inferiore dell'udibile. Il livello di pressione sonora (indicato anche con l'acronimo SPL, *Sound*

*Pressure Level*) è un parametro molto utilizzato per la descrizione del campo sonoro poiché si può misurare con un comune microfono.

Per la potenza e l'intensità sonora si definiscono, rispettivamente, il livello di potenza sonora e il livello dell'intensità sonora:

$$L_P = 10 \log \frac{P^2}{P_0^2} \quad [dB] \quad (A.12)$$

$$L_I = 10 \log \frac{I^2}{I_0^2} \quad [dB] \quad (A.13)$$

dove  $P_0$  è la potenza sonora di riferimento pari a  $10^{-12}$  W, e  $I_0$  è l'intensità sonora di riferimento pari a  $10^{-12}$  W/m<sup>2</sup>.

- **Composizione ed analisi in frequenza**

La semplice funzione sinusoidale del tempo, nota come *tono puro*, non si osserva frequentemente nella realtà, tuttavia è un segnale molto importante per la descrizione dei segnali più complessi. L'espressione di un segnale sinusoidale è del tipo:

$$x(t) = x_M \sin(2\pi f t - \varphi) = x_M \sin\left(\frac{2\pi}{T} t - \varphi\right) = x_M \sin(\omega t - \varphi) \quad (A.14)$$

dove  $x_M$  è il valore massimo ovvero l'ampiezza,  $f$  è la frequenza,  $T$  è il periodo,  $\omega$  è la pulsazione o frequenza angolare pari a  $2\pi f$  e  $\varphi$  è la fase. È chiaro che ampiezza, frequenza e fase specificano completamente un segnale sinusoidale.

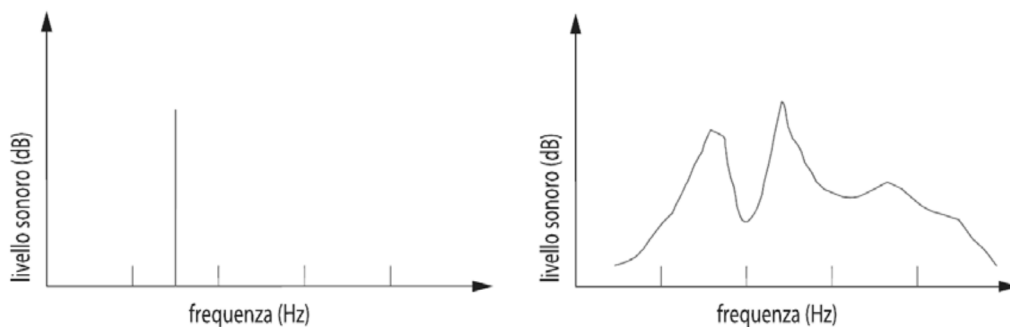
La maggior parte dei suoni non ha un andamento semplice come quello sinusoidale appena descritto, in quanto sia la frequenza che l'ampiezza delle oscillazioni variano continuamente nel tempo. Pertanto, quando si deve analizzare un segnale complesso come un rumore, è necessario analizzarne il contenuto in frequenza per ricavare informazioni utili sulla sorgente origine dell'emissione. Il teorema di Fourier permette di considerare qualsiasi segnale, per complesso che sia, come il risultato di una sovrapposizione di un certo numero (anche infinito) di segnali sinusoidali con diversa

frequenza, ampiezza e fase. Secondo l'analisi armonica di Fourier è, infatti, sempre possibile scrivere per un segnale periodico, una relazione del tipo:

$$x(t) = x_0 + x_{M1} \sin(\omega_1 t - \varphi_1) + x_{M2} \sin(\omega_2 t - \varphi_2) + \dots + x_{Mn} \sin(\omega_n t - \varphi_n) \quad (\text{A.15})$$

Siccome ogni senoide è specificata dall'ampiezza, dalla fase e dalla frequenza, il segnale periodico può essere rappresentato equivalentemente dal diagramma delle ampiezze in funzione della frequenza, pertanto oltre che nel dominio del tempo, un segnale può essere descritto anche nel dominio della frequenza ottenendo quello che è noto come spettro in frequenza delle ampiezze.

La Figura A.3 riporta lo spettro in frequenza di un tono puro e quello continuo di un rumore. Per un tono puro la pressione acustica varia con legge sinusoidale nel dominio del tempo, pertanto nel dominio della frequenza, essendo presente la sola frequenza  $f_0 = \frac{1}{T}$ , il suono è rappresentato con uno spettro molto semplice costituito da una sola linea in corrispondenza del valore  $f_0$ . Nel caso di un rumore casuale, che rappresenta un segnale complesso ma non periodico, si può osservare che il suo spettro è costituito da un gran numero di frequenze che formano uno spettro continuo.



**Fig. A.3** Spettro di un tono puro (a sinistra) e spettro continuo di un rumore (a destra)

L'analisi della composizione in frequenza di un suono può essere effettuata con diversi metodi basati sulla suddivisione del contenuto di energia sonora in *bande*, cioè in prefissati intervalli di frequenza. Ciascuna banda è caratterizzata dalla frequenza nominale di centro banda  $f_c$  e dalle frequenze di taglio superiore  $f_s$  e inferiore  $f_i$ . La relazione che lega la frequenza di centro banda con le frequenze di taglio è la seguente:



$$f_c = \sqrt{f_i \cdot f_s} \quad (\text{A.16})$$

L'ampiezza di banda, definita dalla differenza tra la frequenza di taglio superiore e inferiore ( $\Delta f = f_s - f_i$ ), può essere costante o variabile al variare della frequenza nominale di centro banda. L'analisi ad ampiezza di banda costante viene utilizzata per analisi approfondite sulla composizione in frequenza di rumori generati da sorgenti e macchine, sulla diagnostica e sulle cause generatrici delle emissioni sonore. L'analisi in bande di ampiezza percentuale costante (in particolare la cosiddetta analisi in ottave o terzi di ottava) viene solitamente utilizzata in acustica ambientale ed architettonica. Questa analisi si basa sulla costanza del rapporto tra la larghezza di banda  $\Delta f$  e la frequenza nominale di centro banda  $f_c$  che caratterizza la banda stessa ( $\Delta f / f_c = \text{cost}$ ), ovvero l'ampiezza delle bande d'ottava e delle bande di 1/3 d'ottava è proporzionale alla frequenza di centro banda, cioè le bande si allargano all'aumentare della loro frequenza centrale.

La suddivisione più comune dell'intervallo di frequenze udibili è quella in bande d'ottava ( $\Delta f / f_c = 0.707$ ), ma se si desiderano informazioni più dettagliate si ricorre alla suddivisione in bande di 1/3 d'ottava ( $\Delta f / f_c = 0.232$ ). Per la suddivisione in bande d'ottava la gamma di frequenze udibili è divisa in 8 intervalli non sovrapposti, mentre per la suddivisione in bande di 1/3 d'ottava, la gamma di frequenze udibili è divisa in 24 intervalli non sovrapposti.

- **Assorbimento, riflessione e trasmissione del suono**

Quando il fronte di un'onda sonora urta contro una parete, generalmente si assiste al verificarsi di tre fenomeni, che contribuiscono in maniera diversa alla redistribuzione dell'energia trasportata dall'onda stessa: una parte di questa energia viene riflessa secondo le leggi della meccanica classica; una parte viene dissipata all'interno del materiale di cui è costituita la parete, ed una terza parte attraversa il materiale e procede liberamente oltre (Figura A.4).

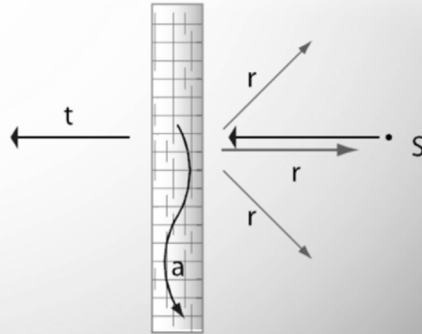


Fig. A.4 Assorbimento, riflessione e trasmissione del suono

Se chiamiamo  $P_i$  l'energia totale che nell'unità di tempo (potenza) incide sulla parete e  $P_a$ ,  $P_r$  e  $P_t$  le quote di potenza rispettivamente assorbita dalla parete, riflessa e trasmessa, si può scrivere:

$$P_i = P_a + P_r + P_t \quad (\text{A.17})$$

Dividendo entrambi i membri dell'equazione per la potenza totale  $P_i$  incidente sulla parete, possiamo riscrivere l'equazione come:

$$1 = a + r + t \quad (\text{A.18})$$

dove  $a$ ,  $r$  e  $t$  sono dei coefficienti adimensionali che esprimono rispettivamente le quote di potenza sonora assorbita, riflessa e trasmessa:

$$a = \frac{P_a}{P_i} \quad (\text{A.19})$$

$$r = \frac{P_r}{P_i} \quad (\text{A.20})$$

$$t = \frac{P_t}{P_i} \quad (\text{A.21})$$

e prendono il nome rispettivamente di coefficiente di assorbimento, riflessione e di trasmissione.

- **Proprietà acustiche dei materiali**

Mediante i coefficienti di riflessione  $r$  e di trasmissione  $t$ , vengono definite le grandezze fisiche che caratterizzano le prestazioni acustiche di un materiale: il *coefficiente di assorbimento acustico apparente*  $\alpha$  e il *potere fonoisolante*  $R$ .

Il coefficiente di assorbimento acustico apparente  $\alpha$  indica la capacità di un materiale di non riflettere energia verso la sorgente, mentre il potere fonoisolante  $R$  quantifica la capacità di isolare l'ambiente ricevente dai rumori provenienti dall'ambiente sorgente. Il coefficiente di assorbimento acustico apparente è dato da:

$$\alpha = 1 - r = a + t = 1 - \frac{P_r}{P_i} \quad (\text{A.22})$$

Mentre il potere fonoisolante è definito come:

$$R = 10 \log \left( \frac{1}{t} \right) = 10 \log \frac{P_i}{P_t} \quad (\text{A.23})$$

Le due grandezze hanno un significato fisico diverso: la prima rappresenta le caratteristiche fonoassorbenti di un materiale, mentre la seconda quelle fonoisolanti. I materiali che forniscono le migliori prestazioni fonoassorbenti presentano bassa massa, alta porosità, superficie cedevole; viceversa, i materiali che danno le migliori garanzie di fonoisolamento hanno massa elevata, superficie continua, sono rigidi e non porosi. Solo accoppiando opportunamente materiali dei due tipi è possibile contemporaneamente ottenere un buon grado di isolamento e di assorbimento acustico.

La grandezza utilizzata per valutare le proprietà isolanti di una parete è il potere fonoisolante  $R$  che, come abbiamo visto, rappresenta la sua attitudine a ridurre la trasmissione del suono incidente su di essa. Il potere fonoisolante varia al variare della frequenza oltre che delle proprietà fisiche, delle dimensioni e delle condizioni di vincolo della parete.

In Figura A.5 si riporta l'andamento teorico del potere fonoisolante, per pareti omogenee e sottili, in funzione della frequenza e al variare dello smorzamento. Come si può

osservare si individuano diverse zone (zona di rigidezza, zona di risonanza, zona della legge di massa, zona di coincidenza) in ciascuna delle quali prevale un certo fattore.

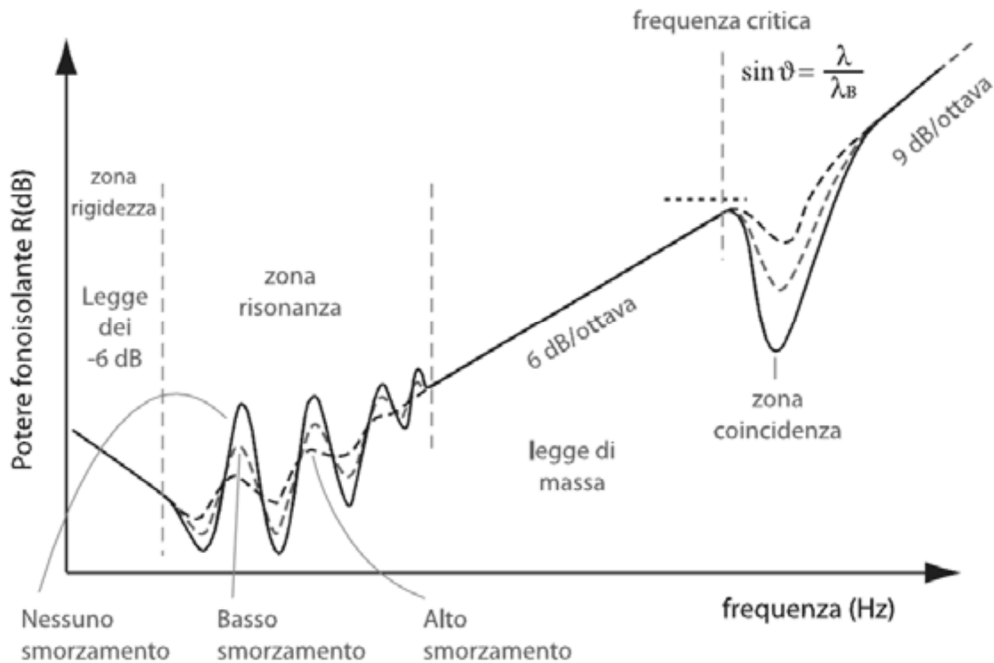


Fig. A.5 Andamento del potere fonoisolante al variare della frequenza e dello smorzamento

Si può innanzitutto notare che il potere fonoisolante assume un valore minimo in corrispondenza della frequenza naturale del sistema.

Il valore della frequenza naturale dipende dalla massa per unità di superficie e dalla sua costante elastica. Quest'ultima, a sua volta, è funzione di proprietà meccaniche (ovvero modulo di elasticità  $E$  e coefficiente di Poisson  $\nu$  del materiale) e geometriche (spessore  $h$ , larghezza  $a$  e altezza  $b$  del sistema), secondo la relazione:

$$f_{r(i,j)} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{Eh^2}{12\rho(1-\nu^2)}} \left[ \left(\frac{i}{a}\right)^2 + \left(\frac{j}{b}\right)^2 \right] \quad (\text{A.24})$$

dove  $\rho$  è la densità del materiale e  $i$  e  $j$  sono numeri interi per il calcolo delle frequenze di ordine superiore.

Il valore del potere fonoisolante nella zona delle frequenze naturali di risonanza oscilla in maniera irregolare con picchi e valli, rimanendo però sempre su valori piuttosto bassi.

Infatti, essendo massima l'oscillazione del pannello in corrispondenza delle suddette frequenze, sarà massima anche l'energia sonora irradiata; pertanto, in corrispondenza delle frequenze di risonanza, il potere fonoisolante diminuisce mentre per frequenze diverse dalle frequenze di risonanza il potere fonoisolante aumenta. La zona del diagramma in cui il valore del potere fonoisolante oscilla in maniera irregolare con picchi e valli è indicata con il nome di *zona di risonanza* ed in essa il suddetto potere sarà funzione della rigidità del pannello.

Dalla figura si può osservare come i valori elevati dello smorzamento tendono a ridurre le valli di isolamento, causate dai fenomeni di risonanza e di coincidenza. Il fattore di smorzamento  $\eta$  indica quale frazione di energia meccanica vibrazionale viene persa in calore in un ciclo della vibrazione.

Per valori della frequenza inferiori alla frequenza di risonanza naturale ( $f < f_r$ ), la trasmissione sonora dipende essenzialmente dalla rigidità (o elasticità) del pannello e quindi gli effetti della massa e dello smorzamento sono poco importanti (*zona di rigidità*). Per le suddette frequenze si registra una diminuzione del potere fonoisolante al crescere della frequenza; in particolare si ha una diminuzione di 6 dB per ogni raddoppio della frequenza.

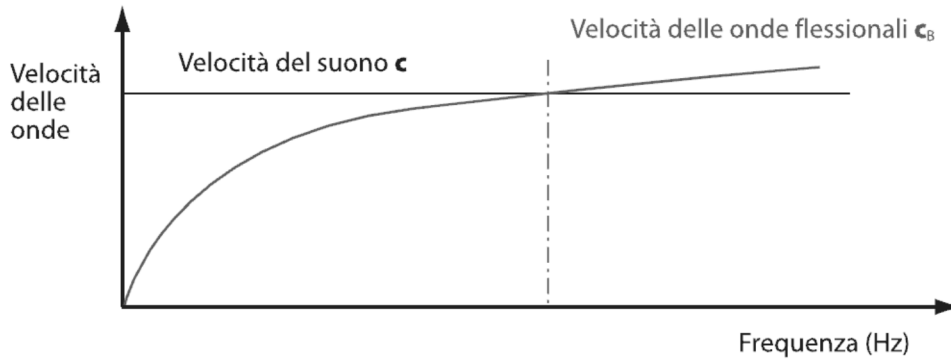
Per valori della frequenza superiori alla frequenza naturale ma comunque inferiori ad un limite superiore fissato dalla cosiddetta *frequenza critica* ( $f_r < f < f_c$ ), il potere fonoisolante è governato dalla legge della massa e si ha un aumento di  $R$  di 6 dB per raddoppio della frequenza e il comportamento del pannello è indipendente dalla sua rigidità. In questa zona per il calcolo del potere fonoisolante si può utilizzare la seguente formula di previsione, nota come *legge della massa*:

$$R_{\theta_i} = 10 \log_{10} \left( \frac{m\pi f \cos \theta_i}{\rho_0 c} \right)^2 \quad [dB] \quad (A.24)$$

dove  $m$  è la massa superficiale,  $f$  è la frequenza,  $\theta_i$  è l'angolo di incidenza,  $\rho_0 c$  è l'impedenza acustica caratteristica dell'aria.

La validità della legge della massa è limitata superiormente dal fenomeno della coincidenza. La velocità del suono nell'aria è costante al variare della frequenza mentre

la velocità delle onde flessionali nelle strutture varia al variare della frequenza. Esisterà quindi un punto di incrocio in cui le due velocità coincidono (Figura A.6).



**Fig. A.6** Coincidenza della velocità del suono con la velocità delle onde flessionali

Le onde sonore piane che incidono con un certo angolo su una parete sottile infinita originano nella parete un'onda flessionale forzata di lunghezza d'onda  $\lambda_{tr}$  pari alla lunghezza d'onda di traccia dell'onda sonora incidente, ossia:

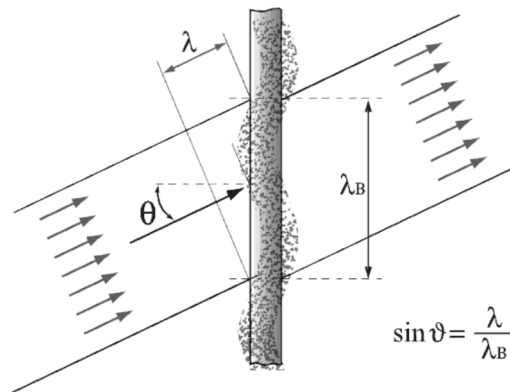
$$\lambda_{tr} = \frac{\lambda_i}{\sin \vartheta} \quad (\text{A.25})$$

dove  $\lambda_i$  è la lunghezza d'onda dell'onda incidente.

Il fenomeno, noto con il nome di coincidenza, si verifica quando, per un determinato angolo d'incidenza  $\theta$ , la lunghezza d'onda di traccia dell'onda sonora piana incidente eguaglia la lunghezza d'onda  $\lambda_B$  dell'onda flessionale libera, cioè:

$$\lambda_B = \frac{\lambda_i}{\sin \vartheta} \quad (\text{A.26})$$

In queste condizioni l'onda di pressione acustica viene accompagnata, nel suo movimento di compressione e rarefazione, dall'onda flessionale sulla struttura e la stessa viene trasmessa dalla parte opposta della parete senza subire attenuazioni (Figura A.7).



**Fig. A.7** Onde sonore piane che incidono su una parete sottile infinita

Poiché il  $\sin\theta$  non può eccedere l'unità, si ha che la frequenza più bassa, per cui si verifica il fenomeno di coincidenza, si ottiene per  $\theta=90^\circ$  (cioè incidenza radente). Questa frequenza è chiamata *frequenza critica* ed è pari a:

$$f_c = \frac{c^2}{\pi h} \sqrt{\frac{3\rho(1 - \nu^2)}{E}} \quad (\text{A.27})$$

dove  $E$  è il modulo di Young,  $\nu$  è il coefficiente di Poisson,  $\rho$  è la densità e  $h$  è lo spessore del pannello, e  $c$  è la velocità del suono nell'aria. La coincidenza si verifica nel caso particolare in cui  $\lambda i = \lambda B$  o in modo equivalente quando  $cB=c$ .

In campo diffuso le onde incidono sulla parete da tutte le direzioni. Il fenomeno di coincidenza in questo caso interessa un intervallo di frequenze; infatti, per ogni angolo d'incidenza esiste una corrispondente frequenza di coincidenza.

Il fenomeno della coincidenza è particolarmente importante quando si ha incidenza di onde piane con un certo angolo di inclinazione. In un campo diffuso il fenomeno della coincidenza è attenuato dal fatto che la quantità di energia trasportata dall'onda che subisce tale fenomeno, per una certa frequenza e per uno specifico angolo, è piccola rispetto a tutta quella che incide con angoli diversi alla stessa frequenza.

Al di sopra della frequenza critica e della zona dove si verifica il fenomeno della coincidenza, il potere fonoisolante torna ad aumentare con una pendenza teorica di 9 dB per raddoppio di frequenza e quindi superiore a quella che si verifica nel campo di validità della legge di massa. In campo diffuso si può calcolare il potere fonoisolante sopra la frequenza critica con la seguente espressione:

$$R_d = 20 \log_{10}(mf) + 10 \log_{10} \left( \frac{f}{f_c} - 1 \right) + 10 \log_{10} \eta - 44 \quad (\text{A.28})$$

dove  $f_c$  è la frequenza critica della parete (espressa in Hz) e  $\eta$  è il fattore di smorzamento totale della stessa. Il fattore di smorzamento totale, come abbiamo visto, sintetizza i meccanismi di smorzamento all'interno della parete eccitata indicando quale frazione dell'energia meccanica vibratoria viene convertita in calore in un ciclo della vibrazione. Poiché lo smorzamento dipende non solo dal materiale, ma anche dalle condizioni al contorno, la previsione del potere fonoisolante al di sopra la frequenza critica ha una affidabilità limitata.

## A.2 Le Vibrazioni

Lo studio delle vibrazioni degli organi delle macchine riveste una notevole importanza, per gli effetti che tali moti possono avere sul funzionamento delle macchine nel loro complesso e sulla vita degli organi meccanici stessi.

Affinché si manifesti un moto vibratorio è necessario che al sistema appartenga almeno un membro cui sia possibile attribuire caratteristiche elastiche, e che al sistema sia applicata almeno una forza (o una coppia) non costante, variabile nel tempo con legge periodica.

Nell'ambito della validità della legge di Hooke, la caratteristica elastica può essere individuata nella elasticità propria del materiale che costituisce il sistema o uno dei suoi membri, oppure in quella di un singolo elemento del sistema stesso (per esempio una molla); talvolta tale caratteristica è surrogata dal manifestarsi, durante il moto, di particolari forze che tendono (come nel caso del pendolo) a riportare il sistema nella configurazione di equilibrio statico. In generale tale caratteristica può sempre essere sintetizzata in una costante elastica (indicata di solito con la lettera  $k$ ) che identifica o un legame forza/spostamento o un legame momento/rotazione.

Quando si ha a che fare con sistemi reali è necessario tener conto anche di una caratteristica dissipativa ossia il destarsi, con il moto, di forze che si oppongono al moto stesso ed il cui effetto è quello di limitare l'ampiezza del moto oscillatorio del sistema (*smorzamento*).



Il più comune smorzatore è quello di tipo viscoso in cui le forze che si oppongono al moto sono proporzionali alla velocità. In tal caso la caratteristica dissipativa del sistema viene sintetizzata in un coefficiente di smorzamento viscoso, (effettivo o equivalente) che si indica, in genere, con la lettera  $c$ , e che rappresenta appunto un legame forza/velocità. Tuttavia si possono avere anche smorzatori di tipo particolare in cui la forza che si oppone al moto dipende dal quadrato della velocità. Inoltre, costituisce una caratteristica dissipativa anche la presenza dell'attrito negli accoppiamenti fra i vari membri di una macchina, come pure l'effetto del verificarsi di cicli di isteresi nel materiale (smorzamento strutturale).

In un sistema, insieme agli elementi con caratteristica elastica ed, eventualmente, a quelli con caratteristica dissipativa, devono ritrovarsi anche uno o più elementi massivi. A tutti questi elementi (masse, molle e smorzatori) si dà genericamente il nome di parametri del sistema.

Generalmente i sistemi reali sono molto complessi, in quanto risultano costituiti da membri diversi con caratteristiche dinamiche per lo più diverse fra loro, e solo la conoscenza di queste caratteristiche consente di operare quella idealizzazione che prende il nome di *modello matematico*.

La scelta di procedere ad un'analisi dinamica più approfondita può anche imporre di tener conto della circostanza che i membri di un sistema, considerati membri rigidi nell'ambito dell'analisi cinematica, di fatto sono deformabili; e ciò implicherà il dover sostituire lo studio di un sistema a parametri concentrati (o sistema discreto) con lo studio di un sistema a parametri distribuiti (o sistema continuo). Ne consegue che i gradi di libertà del sistema non possono più essere quelli previsti dalla cinematica dei sistemi rigidi: per ogni sistema continuo si dovranno considerare infinite masse elementari opportunamente vincolate fra loro e in moto relativo; inoltre, mentre i sistemi discreti sono descritti da equazioni differenziali ordinarie, i sistemi continui sono descritti, generalmente, da equazioni differenziali alle derivate parziali.

Comunque il sistema sia costituito, si potrà dire che esso è soggetto a *vibrazione* quando almeno uno dei suoi punti presenta un moto nell'intorno di una data configurazione di equilibrio, moto che si ripete con le medesime caratteristiche dopo un intervallo di tempo ben definito. Tale intervallo di tempo prende il nome di *periodo della vibrazione*  $T$  e, nel caso più semplice, è l'intervallo di tempo in cui si compie una oscillazione completa.

Si definisce *frequenza della vibrazione*  $f$  il numero delle oscillazioni complete per unità di tempo e si misura in Hertz (Hz); più in generale la frequenza della vibrazione è il numero di volte in cui il moto del sistema si presenta con le medesime caratteristiche in un prefissato intervallo di tempo  $T$ , pertanto:

$$f = \frac{1}{T} \quad (\text{A.29})$$

Il moto vibratorio di un sistema dipende, in generale, da due particolari valori di frequenza: la frequenza naturale (o frequenza propria)  $f_n$  che è la frequenza con cui vibra un sistema che ha soltanto caratteristiche elastiche e non è soggetto a forze esterne attive del tipo  $f(t)$ ; la frequenza eccitatrice (o frequenza forzante)  $f_f$  che è quella dell'azione esterna  $f(t)$  (quando esiste) che agisce sul sistema con variabilità periodica.

Quando i valori di tali frequenze coincidono  $f_f=f_n$  si ha la condizione di risonanza, cui può corrispondere una esaltazione dell'ampiezza del moto vibratorio con possibile pericolo per la integrità del sistema. Si comprende, quindi, l'importanza della determinazione della frequenza naturale in un sistema vibrante.

- **Tipi di vibrazioni**

Una prima classificazione delle vibrazioni porta a distinguere fra vibrazioni libere e vibrazioni forzate. Si dicono *vibrazioni libere* le vibrazioni di un sistema che, allontanato, in qualche modo, dalla sua configurazione di equilibrio statico, viene lasciato libero di oscillare in assenza di azioni eccitatrici esterne. Si dicono, invece, *vibrazioni forzate* quelle di un sistema sottoposto invece all'azione di azioni eccitatrici esterne.

Si definiscono, infine, *vibrazioni transitorie* quelle la cui ampiezza varia nel tempo, o fino ad annullarsi, nel caso di vibrazioni libere, ovvero fino a raggiungere l'ampiezza della *vibrazione permanente*, nel caso di vibrazioni forzate. Il transitorio è legato alla presenza, nel sistema, di caratteristiche dissipative (per esempio smorzatori), e pertanto esso è una caratteristica di tutti i sistemi reali, siano essi in vibrazione libera o forzata. Idealmente, un sistema soggetto a vibrazioni libere, se non fosse dotato di alcun tipo di attrito, smorzamento o comunque dispersione energetica, continuerebbe a vibrare infinitamente nel tempo.

- **Richiami di cinematica del moto armonico**

La forma più semplice di moto periodico è il moto armonico, espresso, per un punto, da una relazione del tipo:

$$x(t) = X \cos(\omega t) \quad (\text{A.30})$$

atta a rappresentare lo spostamento  $x(t)$  il cui valore oscilla fra gli estremi  $X$  e  $-X$ , con  $X$  ampiezza della vibrazione, con periodo angolare di  $2\pi$

In termini di unità di tempo, allora, il periodo del moto oscillatorio descritto da una tale funzione sarà:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (\text{A.31})$$

ed  $\omega$ , [ $s^{-1}$ ] prende il nome di *pulsazione angolare*; mentre la frequenza di tale moto sarà data da:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \quad (\text{A.32})$$

Si può ancora osservare che una funzione così scritta assume che il valore del tempo  $t$  si sta misurando da un istante  $t_0$  in cui lo spostamento presentava il suo valore massimo (per  $t_0=0$ ;  $x(t)=X$ ); poiché è del tutto arbitrario il modo di fissare l'origine dei tempi, la forma più generale di rappresentazione del moto armonico sarà:

$$x(t) = X \cos(\omega t + \varphi) \quad (\text{A.33})$$

dove  $\varphi$  è l'*angolo di fase*, che sta ad indicare che l'origine dei tempi è spostata di un  $\Delta t = \varphi/\omega$  rispetto all'istante in cui era  $x(t)=X$ , ossia che troveremo  $x(t)=X$ , non per  $t_0=0$ , ma per  $t_0=-\Delta t$ .

La velocità sarà data da:

$$\dot{x} = -\omega X \sin(\omega t + \varphi) = \omega X \cos\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right) \quad (\text{A.34})$$

e ciò mostra come la velocità sia sfasata di  $\pi/2$  (ovvero sia in quadratura) rispetto allo spostamento: la velocità risulta nulla quando lo spostamento è pari all'ampiezza massima, mentre risulta massima quando il punto attraversa la posizione di equilibrio ( $x=0$ ).

L'accelerazione sarà data da:

$$\ddot{x} = -\omega^2 X \cos(\omega t + \varphi) = \omega^2 X \cos(\omega t + \varphi + \pi) \quad (\text{A.35})$$

e risulta, invece, sfasata di  $\pi$  rispetto allo spostamento e in quadratura rispetto alla velocità.

- **Richiami di dinamica**

Equazione del moto in dinamica

$$[M]\{\ddot{u}(t)\} + [C]\{\dot{u}(t)\} + [K]\{u(t)\} = \{p(t)\} \quad (\text{A.36})$$

Il primo membro rappresenta le forze interne, in cui il primo termine sono le *forze di inerzia*, il secondo le *forze viscosse*, il terzo le *forze elastiche*. Il termine a secondo membro rappresenta le forze esterne.

Ponendo il secondo membro uguale a 0, si ricavano le *vibrazioni libere*:

$$[M]\{\ddot{u}(t)\} + [C]\{\dot{u}(t)\} + [K]\{u(t)\} = \{0\} \quad (\text{A.37})$$

Ponendo anche le forze viscosse uguale a 0, si ottengono le *vibrazioni libere non smorzate*

$$[M]\{\ddot{u}(t)\} + [K]\{u(t)\} = \{0\} \quad (\text{A.38})$$

In assenza di smorzamento la soluzione dell'equazione è:

$$\{u(t)\} = C e^{j\omega t} = A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t) \quad (\text{A.39})$$

Le frequenze *naturali o proprie* rappresentano il numero di onde di tipo sinusoidale o cosinusoidale nel tempo:

$$f = \frac{\omega_n}{2\pi} \quad (\text{A.40})$$

dove:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (\text{A.41})$$

Più in generale, nel caso di sistemi a più gradi di libertà,  $\omega$  è un vettore con [K] ed [M] rispettivamente matrici di rigidità e massa.

Il caso più generale è rappresentato dalle *vibrazioni libere smorzate* e si definisce *smorzamento critico*:

$$b_{cr} = 2\sqrt{km} \quad (\text{A.42})$$

Esso rappresenta il valore dello smorzamento in corrispondenza del quale l'ampiezza del moto va subito a zero senza alcuna oscillazione, in particolare per  $b > b_{cr}$  il sistema si comporta come appena detto, mentre per  $b < b_{cr}$  il moto si smorza dopo un certo numero di oscillazioni.

Dal momento che:

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \left(\frac{b}{b_{cr}}\right)^2} \quad (\text{A.43})$$

Ed essendo  $b \ll b_{cr}$ , cioè  $b$  è compreso tra 0.01 ed 0.1, risulta che le frequenze naturali e quelle smorzate siano molto simili tra loro. Questo è il motivo per cui normalmente si affronta il problema della risoluzione del moto non smorzato, inserendo lo smorzamento solo in una fase successiva nella forma di *smorzamento modale o proporzionale*.

Nel caso più generale di vibrazioni forzate, si risolve l'equazione:

$$[M]\{\ddot{u}(t)\} + [K]\{u(t)\} = \{p(t)\} \quad (\text{A.44})$$

In cui:

$$\{u(t)\} = A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t) + \text{"soluzione particolare"} \quad (\text{A.45})$$

La soluzione particolare dipende dal rapporto tra frequenza di eccitazione del sistema e quella naturale o propria dello stesso; quando la frequenza di eccitazione si approssima a quella naturale, si verifica la condizione nota come *risonanza del sistema*, caratterizzata in assenza di smorzamento da spostamenti tendenti all'infinito.

Si ritiene importante, per una migliore comprensione, ricordare alcuni concetti.

Lo smorzamento è un'approssimazione matematica usata per rappresentare la dissipazione di energia presente all'interno di tutte le strutture. A causa dei valori tipici piuttosto bassi dello smorzamento sono solitamente ammesse semplici approssimazioni nella schematizzazione dello stesso:

*Smorzamento viscoso*

$$F_V = b\dot{u} \quad (\text{A.46})$$

*Smorzamento strutturale*

$$F_S = jGKu \quad (\text{A.47})$$

Approssimando la matrice massa con una matrice di tipo diagonale si consegue una notevole rapidità di calcolo, ma si ha lo svantaggio di non considerare le forze d'inerzia che nascono tra i nodi. Ciò equivale a dire che la massa dell'intera struttura viene concentrata nei nodi e non distribuita sugli elementi, come avviene invece per la matrice di rigidità.

- **Analisi reale agli autovalori**

Il primo passo per un'analisi dinamica è rappresentato dal calcolo delle frequenze naturali o autovalori e delle forme modali associate, in assenza di smorzamento.

Si assume come soluzione dell'equazione una funzione armonica del tipo:

$$\{\dot{u}(t)\} = \{\phi \sin(\omega t)\} \quad (\text{A.48})$$

in cui  $\phi$  è l'autovettore o forma modale, mentre  $\omega$  è l'autovalore o frequenza naturale. Sostituendo la soluzione nell'equazione del moto si ottiene:

$$([K] - \omega^2[M])\{\phi\} = 0 \quad (\text{A.49})$$

Questa equazione ammette una *soluzione banale* ed una *non banale*.

La soluzione banale è rappresentata dai *modi di corpo rigido*:

$$\{\phi\} = 0 \quad \text{con} \quad \det([K] - \omega^2[M]) \neq 0 \quad (\text{A.50})$$

mentre la soluzione non banale è rappresentata dai *modi di corpo flessibile*:

$$\{\phi\} \neq 0 \quad \text{con} \quad \det([K] - \omega^2[M]) = 0 \quad (\text{A.51})$$

L'equazione caratteristica consente, note  $[K]$  ed  $[M]$ , di ricavare  $\omega$  e quindi i valori di  $\phi$ .

$$([K] - \omega^2[M]) = 0 \quad (\text{A.52})$$

Ciascun autovalore ed autovettore così calcolati definiscono un modo di vibrare non smorzato della struttura.

La generica deformata strutturale è il risultato della combinazione lineare di tutti i modi propri di vibrare.

Quindi in definitiva tutto si riduce alla ricerca degli autovalori che annullano il determinante dell'equazione caratteristica. Due sono i possibili metodi di soluzione, i metodi di ricerca e i metodi di trasformazione.

- **Metodi di Ricerca e Metodi di Trasformazione.**

I metodi di ricerca procedono iterativamente alla ricerca della soluzione, per cui il tempo di calcolo dipende fortemente dal numero di autovalori richiesto. Questi metodi sono da

preferirsi per l'estrazione di un basso numero di autovalori per sistemi con un numero elevato di gradi di libertà.

I metodi di trasformazione agiscono, invece, sulle matrici di massa e di rigidezza diagonalizzandole. Questi metodi risultano efficaci per l'estrazione di un numero elevato di autovalori per sistemi con un basso numero di gradi di libertà.

Un metodo che coglie al meglio le opportunità offerte dai due metodi illustrati è il *metodo di Lanczos*, che quindi può essere generalmente utilizzato. Esso ricorre alla *Sparse Decomposition* che sostanzialmente aumenta la velocità di calcolo, riducendo al contempo l'utilizzo di spazio-disco.

Gli autovettori possono essere normalizzati rispetto alla massa o rispetto allo spostamento.

La normalizzazione rispetto alla massa sfrutta la proprietà di ortogonalità delle matrici di massa e di rigidezza. Tale proprietà, valida solo per le matrici di massa e rigidezza, si traduce fisicamente nel fatto che ciascuna forma modale è unica, ovvero che nessun modo proprio può essere ottenuto come combinazione di altri modi propri. Sfruttando questa proprietà ed utilizzando come smorzamento quello modale o proporzionale, si riescono a disaccoppiare completamente le equazioni del moto, ovvero a scrivere un sistema di equazioni linearmente indipendenti che consentono una rapida soluzione del problema agli autovalori/autovettori.

La normalizzazione rispetto al massimo spostamento posto uguale ad 1, è particolarmente utile nella determinazione della partecipazione di diversi componenti a ciascun modo proprio di vibrare della struttura.

- **Analisi di risposta in frequenza**

L'analisi di risposta in frequenza si utilizza quando il fenomeno dinamico che si vuole studiare è il risultato di una eccitazione a regime, ovvero in tutti quei fenomeni in cui il transitorio o è trascurabile perché veloce o perché non produce un'apprezzabile eccitazione nella struttura, oppure se non lo è, non è di interesse il comportamento durante il transitorio stesso.

L'analisi di risposta in frequenza è interamente eseguita nel dominio della frequenza. Ciò significa che le forze esterne agenti sulla struttura sono espresse nel dominio della frequenza così come la risposta dinamica della struttura stessa. Quest'ultima è un valore



complesso caratterizzato da un'ampiezza e da un valore di fase espressa rispetto alle forze esterne e dovuta alla presenza dello smorzamento.

Esistono principalmente due diversi metodi per risolvere l'equazione del moto: il *Metodo Diretto* e il *Metodo Modale*. Il primo tenderebbe a risolvere direttamente l'equazione del moto in presenza di smorzamento (sistema di equazioni accoppiato) per effetto di una eccitazione definita nel dominio della frequenza, il secondo utilizza i modi propri della struttura per disaccoppiare il sistema di equazioni del moto.

Si preferisce utilizzare il Metodo Modale dal momento che esso presenta due grossi vantaggi rispetto il Metodo Diretto: risolvendo prima l'equazione del moto libero non smorzato e tenendo conto dello smorzamento e delle forze esterne solo successivamente, si riesce a disaccoppiare completamente le equazioni, cioè si risolve un sistema di equazioni linearmente indipendenti, e quindi a ridurre sensibilmente i tempi di calcolo. Inoltre il Metodo Modale utilizzando le coordinate modali in luogo di quelle fisiche, riduce drasticamente i gradi di libertà del problema e quindi il numero di equazioni linearmente indipendenti da risolvere.

La trasformazione che consente di passare dalle coordinate fisiche alle coordinate modali è la seguente:

$$\{u\} = [\phi]\{q\} = \sum_i \xi_i \{\phi_i\} \quad (\text{A.53})$$

Dove il vettore  $\{u\}$  rappresenta le *coordinate fisiche*, la matrice  $[\phi]$  rappresenta la *matrice dei modi*, mentre il vettore  $\{q\}$  rappresenta le *coordinate modali*.

In generale le coordinate modali non hanno un preciso significato fisico, tranne per alcuni sistemi semplici ad esempio la trave libera o incastrata. Tale trasformazione consente di ridurre sensibilmente il numero di equazioni da risolvere; infatti mentre le incognite  $\{u\}$  sono tante quanti sono i gradi di libertà della struttura (cioè pari a sei volte il numero di nodi), le incognite  $\{q\}$  sono in numero pari al numero di autovalori/autovettori reali.

Operare tale trasformazione equivale dunque a risolvere un sistema di  $n$  equazioni, con  $n$  molto inferiore al numero di gradi di libertà della struttura.

Partendo dall'*equazione del moto non smorzato*:

$$[M]\{\ddot{u}(t)\} + [K]\{\dot{u}(t)\} = \{p(t)\} \quad (\text{A.54})$$

Operando la trasformazione all'interno dell'equazione che governa le vibrazioni in assenza di smorzamento, si ottiene:

$$-\omega^2 [M][\phi]\{\xi(\omega)\} + [K][\phi]\{\xi(\omega)\} = \{P(\omega)\} \quad (\text{A.55})$$

Ovvero moltiplicando ambo i membri per la matrice dei modi trasposta:

$$-\omega^2 [\phi]^T [M][\phi]\{\xi(\omega)\} + [\phi]^T [K][\phi]\{\xi(\omega)\} = [\phi]^T \{P(\omega)\} \quad (\text{A.56})$$

In cui risultano  $[\phi]^T [M][\phi]$  e  $[\phi]^T [K][\phi]$  matrici diagonali per l'ortogonalità dei modi propri.

Nella forma espressa dall'equazione precedente, le equazioni del moto risultano completamente disaccoppiate, la soluzione del problema matriciale si riconduce alla risoluzione di un sistema di  $n$  equazioni linearmente indipendenti nelle  $n$  incognite rappresentate dalle coordinate modali:

$$m_i \xi_i(\omega) + k_i \xi_i(\omega) = p_i(\omega) \quad \text{con } i = 1 \dots n \quad (\text{A.57})$$

Se si considera lo smorzamento, invece in generale non è più possibile pervenire ad un sistema di equazioni linearmente indipendente come l'equazione precedente, dal momento che la proprietà di ortogonalità dei modi propri non vale per la matrice di smorzamento; pertanto in presenza di smorzamento il metodo modale si ridurrebbe al metodo diretto, con la sola differenza (comunque non trascurabile) rappresentata dal fatto che esso ragiona in termini coordinate modali anzichè fisiche e dunque con un numero di incognite decisamente inferiore. Infatti la matrice  $[\phi]^T [M][\phi]$  non risulta più una matrice diagonale.

Il più importante vantaggio dell'approccio modale è proprio quello di ridurre i gradi di libertà che consentono di descrivere il comportamento dinamico di un generico sistema vibrante al numero di radici del sistema caratteristico, pur mantenendo un'elevata

precisione della soluzione. Da questa affermazione scaturisce il concetto di **Base Modale**: il numero di modi necessari per approssimare all'interno di un dato range di frequenze la risposta del sistema vibrante. Per capire quanto debba essere estesa la base modale, valgono le seguenti considerazioni:

- Il contributo del generico modo di vibrare varia con la frequenza.

All'aumentare della frequenza, la componente statica del generico modo diminuisce; ciò ne determina un minor contributo alla risposta totale.

Da qui si conclude, come regola generale, che definito il range di interesse, la trasformazione modale può essere effettuata considerando "solamente" tutti i "q" modi propri la cui frequenza  $\omega_i$  risulta minore di  $2\Omega_{max}$ .

Una possibilità per tenere comunque disaccoppiate le equazioni del moto in presenza di smorzamento, e dunque sfruttare entrambi i vantaggi offerti dal metodo modale, è quella di applicare lo smorzamento ad ogni modo o frequenza attraverso il ricorso al cosiddetto smorzamento modale o proporzionale.

Le equazioni del moto diventano:

$$-\omega^2 m_i \xi_i(\omega) + i\omega b_i \xi_i(\omega) + k_i \xi_i(\omega) = p_i(\omega) \quad \text{con } i = 1 \dots N \quad (\text{A.58})$$

In cui  $b_i = 2m_i\omega_i\xi_i$  rappresenta il termine di *smorzamento modale o proporzionale*.

Lo smorzamento modale viene misurato sperimentalmente per ciascun modo, e pertanto non è definibile analiticamente. Fisicamente rappresenta il rapporto tra altezza ed ampiezza della campana della risonanza del modo.

- **Sistemi vibranti a n gradi di libertà**

Le vibrazioni di componenti meccanici sono un fenomeno tipico della meccanica classica, rappresentano un'oscillazione del sistema attorno ad una determinata configurazione di equilibrio. Tipicamente si dividono i problemi di vibrazioni in due macrocategorie: vibrazioni libere e vibrazioni forzate di un sistema. Nel primo caso il sistema vibra a causa delle sue condizioni iniziali inizialmente non nulle, nel secondo caso invece un generico meccanismo potrebbe essere soggetto ad una forzante e quindi oscilla a causa della forzante stessa. L'esempio più classico per affrontare l'argomento è lo studio delle vibrazioni forzate smorzate di un sistema ad 1 gdl, il sistema massa-molla-smorzatore:

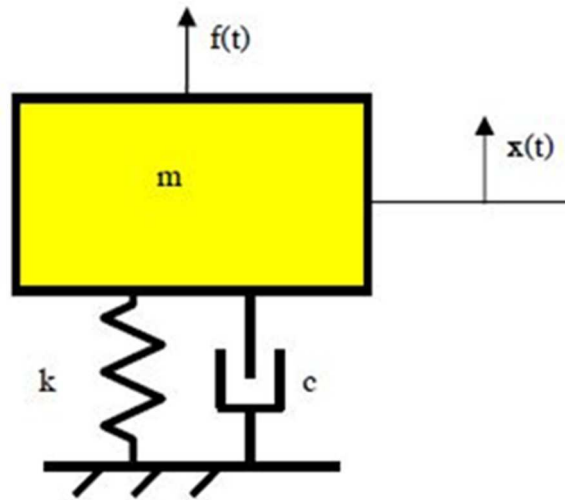


Fig. A.8 Sistema massa, molla e smorzatore soggetto a forzante

L'equazione del moto del sistema è:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f\cos\omega t \quad (\text{A.59})$$

Essendo il sistema ad un gdl, avrà un modo proprio di vibrare ad una certa pulsazione naturale  $\omega_n = \sqrt{k/m}$ . Associando all'equazione del moto le condizioni iniziali del sistema si ricava la soluzione dell'equazione differenziale che definisce l'ampiezza di oscillazione della massa  $m$ ; in generale la soluzione è data dalla somma dell'omogenea associata più una soluzione particolare, quest'ultima è ingegneristicamente fondamentale in quanto definisce il comportamento vibratorio del sistema terminato il transitorio:

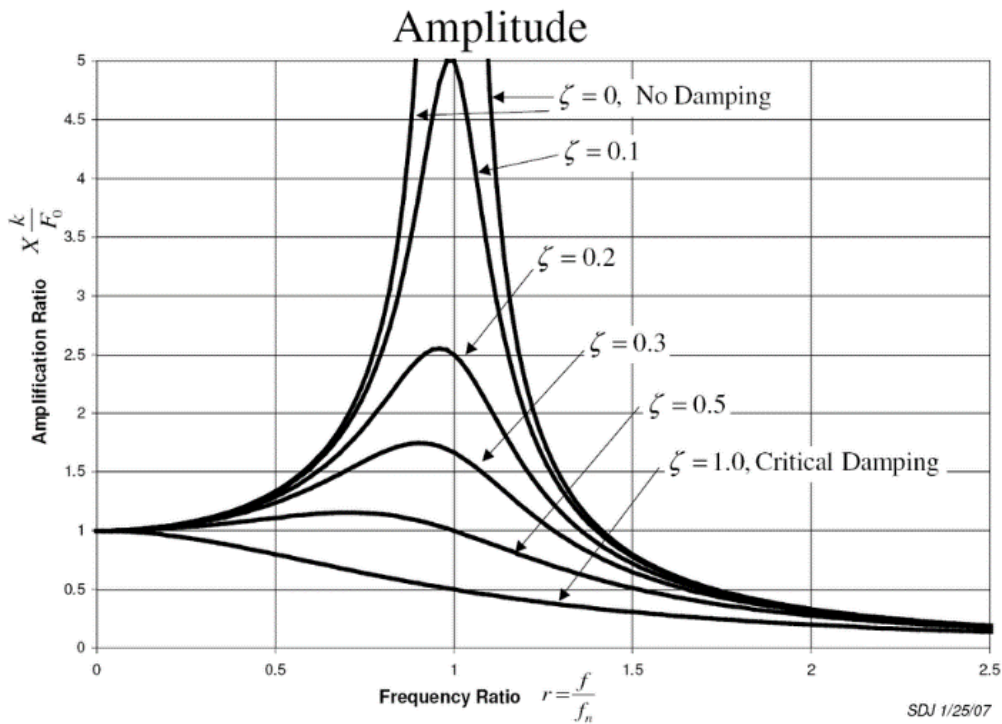
$$x(t) = |X|\cos(\omega t - \psi) \quad (\text{A.60})$$

Dove  $X$  è una funzione complessa da determinare, di fase  $\psi$ , definita dalle seguenti:

$$X = \frac{\left(\frac{f}{k}\right) e^{-j\psi}}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right)^2 + \left(2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}} \quad (\text{A.61})$$

$$\psi = \arctan\left(2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}, 1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right) \quad (\text{A.62})$$

Come si può notare dalle formule, se il sistema non fosse smorzato allora quando la pulsazione coincide con la pulsazione di modo proprio l'ampiezza dell'oscillazione tenderebbe ad infinito, siamo cioè in una condizione di risonanza: è una situazione molto critica per il progettista, nella realtà i sistemi sono smorzati ma comunque le ampiezze di vibrazione tendono a crescere molto e questo potrebbe avere conseguenze meccaniche catastrofiche.



**Fig. A.9** Andamento delle oscillazioni per diversi valori dello smorzamento

Estendendo le stesse considerazioni viste in precedenza, si può arrivare alla scrittura dell'equazione del moto di un generico sistema ad  $n$  gdl libero non smorzato:

$$M\ddot{x} + Kx = 0 \quad (\text{A.63})$$

Dove  $\mathbf{M}$  è la matrice massa del sistema,  $\mathbf{K}$  la matrice rigidezza e il vettore  $\mathbf{x}$  rappresenta il vettore dei modi naturali di vibrare; il sistema presenterà  $n$  modi propri di vibrare caratterizzati ognuno dalla propria frequenza, che si ricava dalla seguente equazione:

$$\det(-\omega^2 \mathbf{M} + \mathbf{K}) = 0 \quad (\text{A.64})$$

In un'analisi modale di risposta in frequenza di un sistema ad  $n$  gdl, genericamente forzato e smorzato, il solutore calcola prima le frequenze naturali del sistema e le corrispondenti forme modali risolvendo il problema senza smorzamento e forzanti, quindi normalizzando gli autovettori (ad esempio rispetto alla matrice massa) si riesce a ricavare un sistema di  $n$  equazioni scalari disaccoppiate che forniscono la risposta del sistema in questione.