

*Dissertazione presentata per il conferimento del titolo di dottore di ricerca in
Ingegneria delle Strutture*

**Analisi dinamica diretta e inversa
di strutture danneggiate a parametri incerti**

Egidio Lofrano
Roma, 10 febbraio 2015

Ciclo XXVII

Direttori di tesi

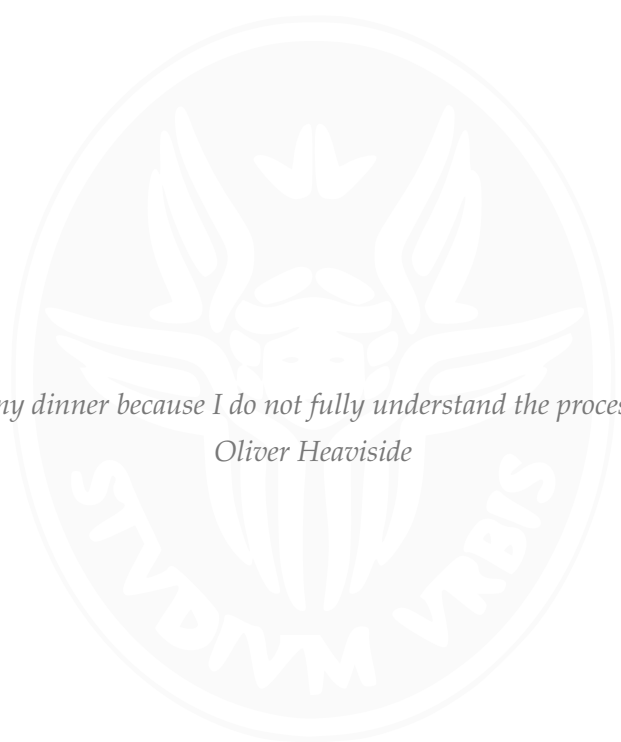
Prof. Achille Paolone
Prof. Francesco Romeo

Coordinatore del dottorato

Prof. Giuseppe Rega (I e II anno)
Prof. Achille Paolone (III anno)



SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA



"Shall I refuse my dinner because I do not fully understand the process of digestion?"

Oliver Heaviside

Analisi dinamica diretta e inversa di strutture danneggiate a parametri incerti.

Egidio Lofrano (egidio.lofrano@uniroma1.it)

Roma, 10 febbraio 2015

Documento di 221 pagine, con 71 figure e 12 tabelle.

Keywords: identificazione dinamica, identificazione del danno, strutture a parametri incerti, approccio perturbativo, empirical mode decomposition.

Tesi presentata in adempimento parziale dei requisiti richiesti per il conferimento del titolo di dottore di ricerca in Ingegneria delle Strutture.

© Sapienza Università di Roma

Via Eudossiana, 18

00184 Roma, Italy

Indice

Cover	1
Indice	6
Elenco delle figure	10
Elenco delle tabelle	11
Elenco delle abbreviazioni	13
Sommario - Abstract	15
Ringraziamenti	17
PARTE 1: PREAMBOLO	19
1 Introduzione	21
1.1 Inquadramento generale	21
1.1.1 Brevi cenni storici	22
1.1.2 Stato dell'arte minimale	23
1.2 Motivazioni e obiettivi	23
1.3 Struttura della tesi	24
2 Identificazione dinamica	27
2.1 Premessa	27
2.2 Aspetti tecnologici e operativi	28
2.2.1 Eccitazione dinamica	29
2.2.1.1 Tipi di eccitatori	29
2.2.1.2 Tipi di eccitazione	30
2.2.2 Risposta dinamica	31
2.3 Analisi del segnale	32

2.3.1	Rapporto segnale/rumore	32
2.3.2	Analisi di Fourier	33
2.3.2.1	Serie di Fourier	33
2.3.2.2	Trasformata di Fourier	35
2.3.2.3	Trasformata discreta di Fourier	37
2.3.2.4	Quadro di sintesi sull'analisi di Fourier	40
2.3.3	Altre tecniche di analisi del segnale	40
2.4	Classificazione dei modelli	42
2.4.1	Modello parametrico fisico	43
2.4.2	Modello parametrico delle funzioni di trasferimento	43
2.4.3	Modello parametrico modale	45
2.5	Tecniche d'identificazione dinamica	46
2.5.1	Tecniche consolidate	47
2.5.2	Sviluppi recenti	48
PARTE 2: UN APPROCCIO PERTURBATIVO PER L'IDENTIFICAZIONE DINAMICA DI STRUTTURE A PARAMETRI INCERTI		51
3	Problema diretto	53
3.1	Premessa	53
3.2	Considerazioni preliminari	54
3.3	Posizione del problema	57
3.4	Approccio perturbativo	58
3.5	Considerazioni sull'errore	60
3.6	Soluzione al primo ordine	61
3.6.1	Generalizzazione al caso multi-parametrico	63
3.6.2	Medie stocastiche dell'autosoluzione	64
3.6.3	Esempio	66
3.7	Soluzione al secondo ordine	76
3.7.1	Generalizzazione al caso multi-parametrico	78
3.7.2	Medie stocastiche dell'autosoluzione	79
3.7.3	Interpretazione delle medie stocastiche dell'autosoluzione	84
3.7.4	Esempio	86
3.8	Irregolarità nelle distribuzioni	96
4	Problema inverso	101
4.1	Premessa	101
4.2	Approccio perturbativo	103

4.2.1	Approfondimenti sulla funzione obiettivo	104
4.2.2	Utilizzi della procedura	106
4.2.3	Scelta dei modelli	108
4.2.4	Strategia risolutiva nel caso di danneggiamento	110
4.2.5	Probabilità di danneggiamento	111
4.2.6	Ricerca del minimo globale	112
4.2.7	Confronto con altri filoni di ricerca	113
4.3	Considerazioni sintetiche	115
 PARTE 3: UNA PROPOSTA D'IDENTIFICAZIONE DEL DANNO BASATA SULL'EMPIRICAL MODE DECOMPOSITION		 119
5	Empirical Mode Decomposition	121
5.1	Formulazione dell'EMD	121
5.1.1	Esempio	125
5.1.2	Effetto del rumore	125
5.1.3	Versione ortogonale dell'EMD	128
5.2	Trasformate di Fourier, Wavelet e di Hilbert-Huang	132
5.2.1	Trasformata Wavelet	133
5.2.1.1	Esempio	136
5.2.2	Trasformata di Hilbert	138
5.2.2.1	Esempio	140
5.2.3	Confronto tra le trasformate	140
5.2.3.1	Esempio	142
6	Pseudo-Mode Index	151
6.1	Premessa	151
6.2	Identificazione modale	154
6.2.1	Esempio	156
6.3	Identificazione del danno	158
6.3.1	Esempio	160
6.3.2	Approfondimenti sul metodo PMI	162
6.3.3	Confronto con altri filoni di ricerca	165
6.3.4	Confronto con altri indici di danno	166
6.3.5	Esempio pilota	168
6.3.5.1	Posizione del danno	169
6.3.5.2	Entità del danno	171
6.4	Considerazioni sintetiche	176

PARTE 4: CONCLUSIONI, APPENDICI E BIBLIOGRAFIA GENERALE	181
7 Conclusioni	183
7.1 Commenti conclusivi	183
7.2 Contributi originali	184
7.3 Prospettive future di ricerca	185
A Trasformata discreta di Fourier	187
A.1 Trasformata di Fourier veloce	187
A.2 Leakage	188
A.3 Teorema di Shannon e aliasing	191
A.4 Filtro anti-alias	194
A.5 Zero padding	195
A.6 Zoom e averaging	197
B Caratterizzazione di una variabile aleatoria	199
B.1 Generalità, momenti, dipendenza	199
B.2 Funzione caratteristica	201
B.3 Distribuzioni gaussiane	202
C Versioni avanzate della trasformata Wavelet e di Hilbert	205
C.1 Trasformata Wavelet: mother wavelet di Morlet complessa	205
C.2 Trasformata di Hilbert: metodo di Savitzky e Golay	206
C.3 Esempio	208
Bibliografia	209

Elenco delle figure

1.1	Esemplificazione dei problemi diretto e inverso.	22
1.2	Prototipo strumentato dell'Airbus A380.	23
2.1	Prototipo accademico di sensore wireless (10 cm x 10 cm x 5 cm).	32
2.2	Spettri di Fourier di un segnale periodico.	35
2.3	Spettri di Fourier di un segnale non periodico.	37
2.4	Discretizzazione e periodicità di un segnale analizzato con la DFT.	39
2.5	Caratteristiche dei segnali e corrispondenti descrizioni spettrali.	41
2.6	Classificazione dei modelli: in alto parametrico, al centro semi-parametrico, in basso non-parametrico.	42
2.7	Tecniche d'identificazione.	47
3.1	Sistema oggetto di studio.	66
3.2	Modi di vibrare del sistema imperturbato.	68
3.3	Distribuzione del parametro θ (caso 2).	70
3.4	Andamento dell'autosoluzione al variare del parametro θ , caso 1.	70
3.5	Andamento dell'autosoluzione al variare del parametro θ , caso 2.	71
3.6	Differenze percentuali tra le medie, caso 1 (ES vs PA) e caso 2 (MC vs PA).	73
3.7	Differenze percentuali tra le medie (ES vs MC).	74
3.8	Differenze percentuali tra le deviazioni standard, caso 2 (MC vs PA).	75
3.9	Andamento dell'autosoluzione al variare del parametro θ , caso 1.	87
3.10	Andamento dell'autosoluzione al variare del parametro θ , caso 2.	88
3.11	Differenze percentuali tra le medie, caso 1 (ES vs PA) e caso 2 (MC vs PA).	90
3.12	Differenze percentuali tra le deviazioni standard, caso 2 (MC vs PA).	91
3.13	Andamento del coefficiente di asimmetria γ_a , caso 2.	92
3.14	Andamento del coefficiente di eccesso γ_e , caso 2.	93
3.15	Simulazione Monte Carlo dell'autovalore λ_1 (caso 2) per $\mu_\theta = 0.25$ e $\sigma_\theta = 0.0125$	94

3.16	Distribuzioni dell'autovalore λ_1 al secondo ordine: confronto tra la distribuzione <i>effettiva</i> e quella gaussiana.	96
3.17	Andamento delle prime quattro statistiche della quarta componente del quarto modo (caso 2).	97
3.18	Istogrammi normalizzati della quarta componente del quarto modo. . .	97
4.1	Diagramma di flusso del metodo di soluzione del problema inverso. . .	109
4.2	Calcolo della probabilità $P(x < y)$ e $P(x > y)$ tramite variabile ausiliaria z . .	112
5.1	Esemplificazione della decomposizione operata dall'EMD: primo IMF. .	126
5.2	Esemplificazione della decomposizione operata dall'EMD: secondo IMF. .	127
5.3	Esemplificazione della decomposizione operata dall'EMD.	127
5.4	Localizzazione tempo-frequenza delle trasformate di Fourier, Fourier a tempo breve e Wavelet.	134
5.5	Andamenti delle tre mother wavelet considerate per diversi valori dei coefficienti a e b	135
5.6	Oscillatore di Duffing.	136
5.7	Oscillatore di Duffing: a sinistra il segnale di risposta, al centro la trasformata di Fourier, a destra la trasformata Wavelet.	137
5.8	Confronto tra le trasformate Wavelet della risposta dell'oscillatore di Duffing.	137
5.9	Trasformata di Hilbert della risposta dell'oscillatore di Duffing.	140
5.10	Sistema oggetto di studio.	143
5.11	Modi di vibrare del sistema.	144
5.12	Risposta oggetto di studio: a sinistra il sistema di eccitazione e registrazione, a destra la storia temporale corrispondente.	144
5.13	Analisi tempo-frequenza della risposta: a sinistra la soluzione analitica, al centro la trasformata Wavelet, a destra la trasformata di Hilbert-Huang. .	146
6.1	Tecniche d'identificazione dinamica sulla base degli IMF (si omettono, per semplicità, i pedici delle grandezze).	156
6.2	Sistema di eccitazione e registrazione.	156
6.3	Confronto tra gli IMF e le storie temporali delle coordinate modali. . . .	157
6.4	Sistema di eccitazione e registrazione.	160
6.5	Analisi del segnale con l'EMD: in alto l'accelerazione registrata, in basso il corrispondente primo IMF.	161
6.6	Confronto tra il primo IMF e le storie temporali delle coordinate modali. .	163

6.7	Analisi tempo-frequenza dell'IMF di Figura 6.5: a sinistra la trasformata Wavelet, a destra quella di Hilbert.	163
6.8	Localizzazione tempo-frequenza del primo IMF.	165
6.9	Identificazione del danno con il metodo PMI.	170
6.10	Confronto tra varie tecniche d'identificazione del danno.	171
6.11	Funzione obiettivo e identificazione del parametro θ per il model updating: a sinistra la soluzione al primo ordine, a destra la soluzione al secondo ordine.	172
6.12	Funzione obiettivo e identificazione del parametro θ , caso 1: a sinistra la soluzione al primo ordine, a destra la soluzione al secondo ordine. . .	174
6.13	Funzione obiettivo e identificazione del parametro θ , caso 2: a sinistra la soluzione al primo ordine, a destra la soluzione al secondo ordine. . .	175
A.1	Complessità degli algoritmi DFT e FFT.	188
A.2	Illustrazione del fenomeno del leakage.	189
A.3	Fenomeno del leakage.	190
A.4	Esempi di finestre temporali.	191
A.5	Riduzione del leakage.	192
A.6	Diversi campionamenti di un segnale sinusoidale.	193
A.7	Fenomeno di aliasing.	194
A.8	Distorsione dello spettro per effetto dell'aliasing.	195
A.9	Filtri passa-basso: a sinistra il filtro ideale, al centro un filtro reale con taglio a $f_s/2.56$, a destra un filtro reale con taglio a $f_s/2.20$	195
A.10	Incremento della risoluzione in frequenza per effetto dello zero padding. . .	196
A.11	Possibili filtri reali.	197
A.12	Averaging: in alto sequenziale, in basso sovrapposto.	198
B.1	Esemplificazione del coefficiente di asimmetria γ_a e del coefficiente di eccesso γ_e	204
C.1	Grafico tridimensionale della mother wavelet di Morlet complessa ($f_b = 2, f_c = 1, a = 1, b = 0$).	206
C.2	Rappresentazioni piane della mother wavelet di Morlet complessa ($f_b = 2, f_c = 1, a = 1, b = 0$): in alto a sinistra la parte reale, in basso a sinistra la parte immaginaria, in alto a destra il modulo, in basso a destra l'angolo di fase.	207

- C.3 Analisi tempo-frequenza della risposta di un oscillatore di Duffing: a sinistra le trasformate Wavelet (con la mother wavelet di Morlet, in alto, e di Morlet complessa, in basso), a destra quelle di Hilbert (senza, in alto, e con, in basso, la regolarizzazione di Savitzky e Golay). 208

Elenco delle tabelle

2.1	Caratteristiche di funzionamento degli eccitatori.	30
2.2	Classificazione delle FRF.	44
3.1	Caratteristiche modali del sistema imperturbato.	68
3.2	Distribuzioni dell'autovalore λ_1 (caso 2) per $\mu_\theta = 0.25$ e $\sigma_\theta = 0.0125$. . .	95
5.1	Confronto tra le trasformate di Fourier, Wavelet e di Hilbert-Huang. . .	142
5.2	Caratteristiche modali del sistema.	144
6.1	Livelli d'identificazione del danno.	152
6.2	Identificazione modale tramite EMD.	157
6.3	Confronto della tecnica PMI con le altre di letteratura.	168
6.4	Confronto tra i casi danneggiato (D) e non (U): variazione delle frequenze e matrice del MAC.	169
6.5	Model updating.	173
B.1	Espressioni dei momenti centrali e non di una variabile gaussiana di media μ e varianza σ^2	203

Pagina lasciata intenzionalmente bianca.

Elenco delle abbreviazioni

Abbreviazione	Significato
COMAC	COordinate Modal Assurance Criteria
DFT	Discrete Fourier Transform
EMA	Experimental Modal Analysis
EMD	Empirical Mode Decomposition
FFT	Fast Fourier Transform
FRF	Frequency Response Function
HHT	Hilbert-Huang Transform
IDFT	Inverse Discrete Fourier Transform
IMF	Intrinsic Mode Functions
IRF	Impulse Response Function
MAC	Modal Assurance Criterion
MIMO	Multiple Inputs-Multiple Outputs
MISO	Multiple Inputs-Single Output
OEMD	Orthogonal Empirical Mode Decomposition
OIMF	Orthogonal Intrinsic Mode Functions
OMA	Operational Modal Analysis
PCOMAC	Pseudo COordinate Modal Assurance Criteria
PMI	Pseudo-Mode Index
RD	Relative Difference
RMS	Root Mean Square
SHM	Structural Health Monitoring
SIMO	Single Input-Multiple Outputs
SISO	Single Input-Single Output
SNR	Signal to Noise Ratio
STFT	Short-Time Fourier Transform

Pagina lasciata intenzionalmente bianca.

Sommario

La tesi presenta un approccio perturbativo per l'identificazione dinamica di strutture a parametri incerti. Il metodo proposto, basato sulla minimizzazione di una funzione obiettivo, è indipendente dall'ordine di approssimazione raggiunto e, ereditando i vantaggi dell'approccio perturbativo, assicura un onere computazionale ridotto. Per superare le difficoltà legate alla selezione del modello fisico nel caso di parametri incerti di danno, è proposto un metodo che sfrutta la versione ortogonale dell'empirical mode decomposition, e cerca di combinare le proprietà modali della struttura con le caratteristiche dei segnali di risposta. Le due tecniche introdotte, ancorché intimamente legate per gli scopi e le applicazioni della tesi, godono di individuale validità.

Abstract

The thesis presents a perturbative approach for dynamic identification of structures with uncertain parameters. The proposed method, based on the minimization of an objective function, is independent of the achieved order approximation and, inheriting the advantages of the perturbation approach, ensures a low computational effort. To overcome the difficulties related to the selection of the physical model for damage like uncertain parameters, it is proposed a method that uses the orthogonal version of the empirical mode decomposition, and seeks to combine the modal properties of the structure with the response signals features. The two introduced techniques, closely related within the framework of the thesis, hold their own individual validity.

Pagina lasciata intenzionalmente bianca.

Ringraziamenti

Una leggenda metropolitana vuole che uno studente all'assegnazione di un tema dal titolo "Cos'è per te il coraggio?" abbia reagito consegnando un foglio bianco e proferendo le seguenti parole "Questo è per me il coraggio!". Non credo sia un fatto realmente accaduto, ma ne sposo la visione ermetica e dedico a quanti leggeranno queste poche righe quello che per me è un segno di riconoscenza.

Grazie.

Ecco come me la cavai qualche anno fa in occasione della tesi di laurea (potere dell'autocitazione). Scelsi una strada così agevole principalmente per due motivi, da una parte perché la pagina dei ringraziamenti è tendenzialmente la più letta e nel ringraziare qualcuno si corre sempre il rischio di deludere qualcun altro, dall'altra perché ero certo all'epoca che avrei avuto altre e più importanti occasioni per dare libero sfogo alla fantasia. Ora penso di aver maturato quel minimo di consapevolezza che serve per lanciarsi nella scrittura di un testo non scientifico, senza rischiare di pentirsene poi a pochi mesi di distanza (spero. . .).

Quando decisi di abbandonare la strada altra (sicuro non lastricata d'oro, ma, almeno in apparenza, meno impegnativa) per la nuova, non lo feci per una questione di opportunità, ma con la certezza che di questo percorso non mi sarei pentito. Oggi posso affermare che non mi sbagliavo: da quel punto in poi la strada è stata tutta in discesa. Gli studi e le ricerche, i seminari e i convegni, ogni cosa si è inanellata da sé con la precedente, e così la tesi, che da un certo punto in poi ho visto crescere in forma quasi indipendentemente dalla mia volontà. Però niente è gratis, ed è giusto ringraziare tutti coloro senza il cui aiuto non ce l'avrei fatta.

Il primo ringraziamento non può che andare a Giuseppe Egidio, Maria e Veronica, la mia famiglia, per avermi sempre supportato e sopportato in questi anni. Delle vostre cure e del vostro amore vi sarò eternamente grato.

Ringrazio di cuore il prof. Paolone, cui va il merito di aver nutrito incessantemente la mia passione per il *téchne*, a partire dal lontano 2006 (o giù di lì) quando accese in me, studente di ingegneria poco più che ventenne, l'ardore per la scienza. Grazie *maestro*.

Un grazie sentito spetta al prof. Romeo, che in questi anni ha riservato anche alla mia più iniqua osservazione un impegno e una serietà davvero fuori dal comune, e propri di chi è in grado di anteporre al mero rigore uno più alto spirito propositivo.

Un pensiero speciale (stando ben attento alla costruzione logica. . . lui sa il perché) va poi al prof. Ruta, non solo perché costantemente presente sin dai tempi della tesi di laurea, ma, e soprattutto, per essere stato per me una fonte inesauribile di ispirazione.

In verità, alla stesura di questo documento hanno contribuito, in misura più o meno significativa, e in modo più o meno consapevole, altri docenti. Non li citerò, perché ognuno di loro sfogliando le pagine che seguono potrà riconoscere la propria firma nel documento, e credo che questo sia il modo migliore di ringraziarli.

Un ringraziamento speciale va a Matteo, compagno di stanza e di tanti viaggi a due ruote (e altrettanti Aimeta). Un caloroso abbraccio va ad Andrea, per avere condiviso con me gioie e dolori (finora più i secondi direi), a Laura, compagna di stanza e di disavventure (anche lei ahimè), a Roberto, con il quale ho diviso non solo la stanza ma anche la scrivania in un periodo di particolare affollamento del laboratorio, ad Angelo, per essere stato sempre “fedele alla linea”, a Sandra, che dopo avermi tollerato come correlatore ora mi ritrova come vicino, e al resto del DISG, per esserci stato.

L’ultimo, ma egualmente sincero, pensiero lo dedico al sempiterno calore dei miei parenti e all’inestimabile (inguaribile?!) spensieratezza degli amici di sempre.

el

Parte 1: Preambolo

Pagina lasciata intenzionalmente bianca.

Capitolo 1

Introduzione

1

Si inquadra l'argomento di tesi e si forniscono alcuni brevi riferimenti storici. Chiudono il capitolo lo stato dell'arte e l'esposizione della struttura della tesi. Si precisa che lo stato dell'arte qui riportato è volutamente minimale, mentre per uno stato dell'arte più dettagliato sulle tematiche trattate si rimanda ai paragrafi dedicati nel corpo della tesi.

1.1 Inquadramento generale

Nell'ultimo cinquantennio uno dei temi più trattati nell'ambito dell'ingegneria delle strutture è l'analisi dinamica. Il ramo principale di ricerca è destinato allo studio dello stato tenso-deformativo indotto nelle strutture da azioni marcatamente variabili nel tempo (e.g., il vento e il sisma), per le quali le usuali trattazioni statiche e pseudo-statiche cadono in difetto.

Altro argomento di interesse è l'utilizzo dell'analisi dinamica ai fini dell'identificazione strutturale, ovvero una branca di ricerca destinata allo studio delle caratteristiche delle strutture esistenti. Da un punto di vista epistemologico, il quesito cui l'identificazione è tenuta a rispondere è esattamente agli antipodi rispetto a quello classico della progettazione: mentre nell'ambito progettuale il modello della struttura è noto e si intende conoscere la risposta strutturale per assegnate azioni, nel caso dell'identificazione si vuole risalire al modello strutturale, note che siano la risposta strutturale

e le azioni in gioco. In altri termini, se in fase progettuale il problema può definirsi diretto, perché, note delle grandezze di ingresso, si ricavano quelle in uscita, nel caso di identificazione strutturale è opportuno parlare di *problema inverso*, giacché, note le grandezze in uscita, ci si interroga sulla struttura che le ha generate, cfr. Figura 1.1.

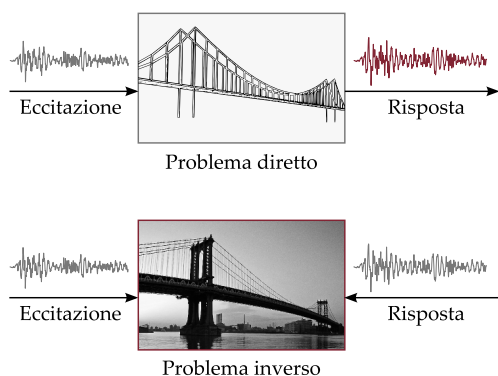


Figura 1.1: Esempificazione dei problemi diretto e inverso.

Appare evidente come, alla stregua di quanto avviene nel problema diretto, la casualità delle varie proprietà di una struttura può essere un fattore cruciale, specialmente quando si è interessati alla valutazione della sicurezza strutturale. Va da sé che per sistemi caratterizzati da parametri casuali, anche l'identificazione dinamica assume carattere stocastico: nasce quindi la necessità di riferirsi a un modello globale capace di incorporare le informazioni probabilistiche e risalire quindi alle distribuzioni (o alle statistiche) dei parametri.

1.1.1 Brevi cenni storici

Le origini dell'identificazione dinamica sono (relativamente) recenti: fino al 1947, infatti, gli studi sulle strutture esistenti erano praticamente limitati alla misura e all'analisi della sola risposta strutturale. Da quell'anno in poi, principalmente per la spinta evolutiva dovuta all'ambito aeronautico [1.6], alla misura della risposta si è aggiunta quella dell'eccitazione. Il vero impulso alla materia si è avuto, però, quasi vent'anni più tardi, precisamente nel 1965, con l'introduzione della Fast Fourier Transform [1.3] e la conseguente diffusione progressiva delle tecniche d'identificazione dinamica su larga scala; indubbiamente a tale sviluppo hanno contribuito l'evoluzione, la miniaturizzazione e la riduzione dei costi degli strumenti di registrazione [1.5].

Dal punto di vista applicativo si sta oggi assistendo alla progressiva crescita dell'integrazione negli elementi strutturali di sensori dedicati alla misura della risposta dinamica, condizione sintomatica di un progressivo passaggio verso il monitoraggio strutturale in continuo. Anche su questo fronte un impulso significativo è da riconoscere all'ambito aeronautico, in cui i produttori di aeromobili di nuova generazione, come ad esempio l'Airbus A380 di Figura 1.2, hanno riconosciuto l'importanza dell'identificazione dinamica come supplemento ai metodi di controllo non distruttivi tradizionali, prevedendo l'utilizzo di una rete di sensori atta al controllo dell'integrità strutturale.

1.1.2 Stato dell'arte minimale

Le tecniche d'identificazione dinamica proposte in letteratura nell'arco degli ultimi venti anni sono numerose, tanto nel dominio del tempo (Ibrahim Time Domain, ...), quanto in quello delle frequenze (Peak Picking, ...) [1.4, 7]. Più recentemente, hanno suscitato grande interesse le procedure dedicate all'analisi con eccitazione incognita, le comunemente dette tecniche Output-Only [1.2, 9], anche in questo caso formalizzate sia nel dominio del tempo (Stochastic Subspace Identification, ...), sia in quello delle frequenze (Frequency Domain Decomposition, ...).



Figura 1.2: Prototipo strumentato dell'Airbus A380.

Nel caso di strutture a parametri incerti, diversamente, gli studi di letteratura hanno focalizzato l'attenzione sulle statistiche dell'autosoluzione di un sistema dinamico, vale a dire, sulle statistiche del problema diretto [1.8, 1]. Gli approcci dedicati all'identificazione strutturale sono, invece, solitamente sviluppati trascurando l'aleatorietà del sistema, questo sia per la natura inversa del problema, che spesso lo rende mal condizionato e indeterminato, che per la scarsità di soluzioni in forma chiusa.

1.2 Motivazioni e obiettivi

Il crescente interesse verso lo studio dei problemi strutturali inversi ha motivato l'argomento di tesi, imperniato sull'identificazione strutturale tramite analisi dinamica. La possibilità di risalire alle caratteristiche delle strutture esistenti a partire dalla conoscenza della loro risposta ha, infatti, molteplici applicazioni: il controllo delle ipotesi progettuali in fase esecutiva, la verifica delle proprietà di un'opera in fase di collaudo e l'analisi della risposta strutturale in fase d'esercizio; peraltro, il monitoraggio di strutture sensibili consente anche il rilievo di eventuali danneggiamenti, un aspetto di interesse ai fini della salvaguardia dell'integrità e della sicurezza del patrimonio esistente. In tali ambiti, in luogo delle più classiche tecniche d'identificazione statica, si stanno sempre più affermando tecniche d'identificazione dinamica, il cui vantaggio principale è quello di poter valutare le proprietà strutturali eseguendo, con costi contenuti, una scansione globale dell'intera struttura. Peraltro, nell'ambito delle costruzioni civili, l'identificazione dinamica è ormai esplicitamente richiamata anche dalle normative tecniche vigenti.

Dalle ricerche bibliografiche effettuate sul tema, è emerso come anche i più recenti metodi d'identificazione strutturale dinamica siano, nella maggior parte dei casi, destinati a una caratterizzazione deterministica delle strutture, mentre scarseggiano gli approcci dedicati alle strutture a parametri incerti. Peraltro, gli approcci disponibili appaiono computazionalmente onerosi e poco flessibili. L'obiettivo è, dunque, sviluppare una procedura d'identificazione dinamica probabilistica numericamente efficace e facilmente gestibile. Nell'applicare la procedura probabilistica sviluppata per un caso di grande interesse, quale l'identificazione di parametri incerti di danno, sono emerse però alcune difficoltà operative, che hanno suggerito di implementare per questi casi un'analisi preliminare atta a stimare la posizione del danneggiamento. Dallo studio della letteratura disponibile sui metodi dinamici d'identificazione del danno è risultato che le tecniche possono suddividersi tra quelle basate sulle proprietà fisiche o modali della struttura e quelle fondate sulle caratteristiche di elaborazione dei segnali, le prime che tendono a essere poco sensibili, le seconde di difficile interpretazione fisica. L'obiettivo è proporre un metodo capace di combinare le potenzialità complementari di entrambe le filosofie.

1.3 Struttura della tesi

La tesi è strutturata in quattro parti. Nella prima, cui la presente introduzione appartiene, si introducono alcuni concetti basilari dell'identificazione dinamica lineare; tale porzione, da intendersi, quindi, compilativa, ha lo scopo di meglio inquadrare e circoscrivere l'argomento trattato nella tesi.

Nella seconda parte si illustra la procedura sviluppata per l'identificazione dinamica di strutture a parametri incerti. Del metodo proposto, un approccio perturbativo basato sulla minimizzazione di una funzione obiettivo, sono poi mostrate le principali caratteristiche (indipendenza dall'ordine di approssimazione, onere computazionale ridotto, ...).

Come evidenziato dalla stessa disamina delle caratteristiche del metodo, il principale punto di debolezza dell'approccio proposto è la selezione del modello fisico nei casi in cui i parametri incerti sono parametri di danno. Per questo motivo, nella parte terza è presentato un metodo che sfrutta la recente versione ortogonale dell'empirical mode decomposition per cercare di combinare le proprietà modali della struttura con le caratteristiche dei segnali di risposta e individuare, di conseguenza, il modello più appropriato. Le due tecniche introdotte nelle parti seconda e terza, intimamente legate per gli scopi e le applicazioni della tesi, hanno comunque una propria individuale validità generale.

La quarta e ultima parte consta di conclusioni, appendici e bibliografia generale. Nello specifico, il lavoro è corredato dalle seguenti tre appendici: l'appendice A riporta alcuni aspetti fondamentali relativi alle prestazioni della trasformata discreta di Fourier, l'appendice B richiama alcune nozioni utili ai fini della caratterizzazione di una variabile aleatoria e l'appendice C analizza due versioni migliorate delle trasformate Wavelet e di Hilbert.

Per chiarezza espositiva, in coda a ogni capitolo sono riportati i corrispondenti riferimenti bibliografici; l'elenco completo della letteratura consultata è comunque reperibile nella bibliografia generale.

Gli argomenti trattati nella tesi sono illustrati per mezzo di esempi esplicativi introdotti direttamente nel corpo della tesi, ove questi non ne interrompano il flusso, piuttosto che in paragrafi dedicati, qualora questo risulti più conveniente ai fini dell'intellegibilità del documento.



Bibliografia

- [1.1] S. Adhikari e M. I. Friswell. *"Random eigenvalue problems in structural dynamics"*. 45th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics & Materials Conference, 2004.
- [1.2] R. Brincker, L. Zhang, e P. Andersen. *Modal identification of output-only systems using frequency domain decomposition*. *Smart Materials and Structures*, 10(3):441–446, 2001.
- [1.3] J. W. Cooley e J. W. Tukey. *"An algorithm for the machine calculation of complex Fourier series"*. *American Mathematical Society*, 19(90):297–301, 1965.
- [1.4] D. J. Ewins. *"Modal testing: theory and practice"*, volume 2 di *Engineering dynamics series*. *Research Studies Press*, 1^a edizione, 1984.
- [1.5] C. R. Farrar e K. Worden. *"An introduction to structural health monitoring"*. *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 365(1851):303–315, 2007.
- [1.6] C. C. Kennedy e C. D. P. Pancu. *"Use of vectors in vibration measurement and analysis"*. *Journal of the Aeronautical Sciences*, 14(11):603–625, 1947.

- [1.7] N. M. M. Maia e J. M. M. Silva. *"Theoretical and experimental modal analysis"*, volume 9 di *Engineering dynamics series*. Research Studies Press, 1^a edizione, 1997.
- [1.8] C. S. Manohar e R. A. Ibrahim. *"Progress in structural dynamics with stochastic parameter variations: 1987 to 1996"*. *Applied Mechanics Reviews*, 52(5):177–197, 1999.
- [1.9] B. Peeters e G. De Roeck. *"Stochastic System Identification for Operational Modal Analysis: a review"*. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 123(4):659–667, 2001.

Capitolo 2

Identificazione dinamica

2

Il problema inverso alla base dell'identificazione strutturale dinamica può sintetizzarsi nelle seguenti fasi:

- eccitazione della struttura (grandezze in ingresso) e registrazione della risposta strutturale (grandezze in uscita);
- analisi delle grandezze in ingresso e in uscita;
- costruzione di un modello strutturale;
- implementazione di una formulazione matematica interpretativa del legame tra i dati in ingresso e in uscita e il modello strutturale (l'identificazione dinamica in senso stretto).

Quanto segue è un richiamo sulle nozioni basilari delle testé citate quattro fasi dell'identificazione dinamica [2.17, 16].

2.1 Premessa

L'analisi dinamica ai fini dell'identificazione strutturale è uno strumento dalle notevoli applicazioni; la nascita in tempi recenti di software commerciali dedicati (*ARTeMIS*,

LEONIDA, MACEC, ...) ne è una limpida testimonianza. Con particolare riferimento all'iter procedurale tipico delle strutture d'ingegneria civile, si possono indicare i seguenti impieghi:

- in fase esecutiva: durante la progettazione, le prestazioni di una struttura sono dedotte sulla base di modelli di calcolo atti a simulare il comportamento al vero dell'opera. Tali modelli rappresentano una schematizzazione della realtà e caratterizzano materiali e azioni per mezzo di stime probabilistiche. Il controllo delle effettive proprietà dinamiche durante l'avanzamento dei lavori, è pertanto utile per individuare le eventuali discrepanze tra l'opera in esecuzione e le ipotesi assunte in fase progettuale, permettendo di ricalibrare i modelli di calcolo e limitando l'insorgenza di inefficienze strutturali;
- in fase di collaudo: l'entrata in esercizio di un'opera richiede che vengano effettuate prove di collaudo capaci di saggiare la coerenza fra le previsioni progettuali e l'effettiva risposta della struttura. Allo scopo, oltre alle classiche prove di collaudo statiche, si utilizzano sovente prove dinamiche, peraltro richiamate esplicitamente nelle normative tecniche [2.1];
- in fase d'esercizio: per verificare che un'opera continui a garantire le prestazioni per la quale era stata progettata, risulta necessario, specie per opere di una certa importanza, monitorare la struttura ed eventualmente valutarne lo stato di danno. Anche in questo ambito, l'utilizzo di prove sperimentali dinamiche può rappresentare un valido strumento d'indagine. Al processo d'implementazione di una strategia d'identificazione del danno è assegnata, data l'importanza strategica di questo tipo di studio, la particolare denominazione **SHM** (*Structural Health Monitoring*).

2.2 Aspetti tecnologici e operativi

I dati alla base del processo di identificazione possono ottenersi sia per tramite di semplici registrazioni (e.g., misura delle vibrazioni indotte dall'azione del vento), sia per mezzo di specifiche prove dinamiche (e.g., eccitazione con vibrodina). La corrispondente risposta strutturale è rilevata per mezzo di opportuni strumenti di misura, atti a registrarne le caratteristiche dinamiche. I paragrafi che seguono racchiudono alcuni cenni agli aspetti salienti sia tecnologici sia operativi.

2.2.1 Eccitazione dinamica

Esistono due tipi d'eccitazione dinamica : *artificiale* e *ambientale*. Nel primo caso l'eccitazione è prodotta da specifiche apparecchiature, dette *eccitatori*, mentre nel secondo scaturisce dal naturale impiego della struttura nelle condizioni d'esercizio.

Le apparecchiature utilizzate nel caso di eccitazione artificiale sono distinte in base alla natura fissa o meno del collegamento alla struttura:

- eccitatori fissi:
 - meccanici;
 - elettrodinamici;
 - elettroidraulici (o attuatori);
 - idraulici;
- eccitatori non fissi:
 - martelli a impatto;
 - pendoli a impatto;
 - cavi di rilascio.

Costituiscono ulteriori categorie a parte di eccitazione artificiale sia la tecnica delle onde guidate, sia l'utilizzo di tavole vibranti per analisi a spostamenti impressi.

Sulla base del tipo di forzante applicata si distinguono, inoltre, i seguenti tipi di eccitazione:

- sinusoidale semplice;
- sinusoidale a frequenza variabile;
- periodica;
- casuale;
- impulsiva o in transitorio.

2.2.1.1 Tipi di eccitatori

Il principio di funzionamento di un *eccitatore meccanico*, o vibrodina, si basa sulla rotazione di due masse calettate eccentricamente su altrettanti dischi. Le rotazioni, generate da un motore elettrico, avvengono nello stesso piano e con pari velocità, ma in versi opposti, inducendo come conseguenza una forza ad andamento sinusoidale.

Eccitatore	Forzante massima	Intervallo di frequenza
–	kN	Hz
Meccanico	500	1–100
Elettrodinamico	100	5–3000
Elettroidraulico	1000	0–200
Idraulico	70	2–20
Martello a impatto	–	0–5000

Tabella 2.1: Caratteristiche di funzionamento degli eccitatori.

Un *eccitatore elettrodinamico* è caratterizzato da una bobina mobile collocata all'interno di un campo magnetico e da un sistema elettronico di alimentazione della bobina stessa. L'interazione genera una forza il cui andamento dipende dalla natura del segnale elettrico.

L'*eccitatore elettroidraulico* utilizza, invece, un sistema cilindro-pistone strumentato con servovalvole azionate elettronicamente. Alla forzante risultante si può imporre un qualsivoglia andamento, ma il sistema necessita di una struttura di contrasto.

L'*eccitatore idraulico*, come quello elettroidraulico, può generare forze ad andamento generico; non necessita di strutture di contrasto, ma è capace di esprimere forze di intensità ridotta.

Circa gli eccitatori non fissi, si ricorda quello di maggior utilizzo, il *martello a impatto*. Tale eccitatore si compone di un martello o, più in generale, di una massa battente, e di un trasduttore di forza.

Gli usuali campi di funzionamento (intensità massima della forzante sviluppata e intervallo di frequenza) dei suddetti eccitatori sono riportati in Tabella 2.1.

2.2.1.2 Tipi di eccitazione

Un'eccitazione *sinusoidale semplice* è descritta da una forzante f del tipo:

$$f(t) = f_0 \sin(\Omega t + \varphi) \quad (2.1)$$

d'ampiezza f_0 , frequenza angolare Ω e angolo di fase φ .

Un'eccitazione *sinusoidale a frequenza variabile* è descritta da una forzante f del tutto analoga a quella riportata nell'equazione (2.1), ma nella quale:

$$\Omega = \Omega(t) \quad (2.2)$$

ovvero a frequenza angolare variabile.

Nel caso di *eccitazione periodica* la forzante f si esprime:

$$f(t) = f(t + T_f) \quad (2.3)$$

ovvero:

$$f(t) = \sum_{k=1}^m f_{ok} \sin(\Omega_k t + \varphi_k) \quad (2.4)$$

con armoniche d'ampiezza f_{ok} , frequenza angolare $\Omega_k = k\Omega$, essendo Ω la frequenza angolare fondamentale, e angolo di fase φ_k .

Nel caso più generale, ovvero quando la forzante f non rientra nelle precedenti categorie, si parla di *eccitazione casuale*; tuttavia, se si tratta di un'azione di tipo impulsivo, si utilizza più propriamente la dicitura *eccitazione impulsiva*.

2.2.2 Risposta dinamica

Nell'ambito dell'ingegneria delle strutture, le grandezze fisiche che ha interesse monitorare nello studio della risposta dinamica sono le seguenti:

- grandezze cinematiche: spostamenti, velocità, accelerazioni;
- grandezze tenso-deformative: deformazioni, forze, pressioni;

per ognuna delle quali esiste un apposito *trasduttore* che ne permette la misura. Nella pratica, le grandezze cinematiche sono quelle di maggiore interesse e, in particolare, si preferisce usare trasduttori di accelerazioni, gli *accelerometri*, che rispetto ai trasduttori di spostamento e velocità, prevedono come principio di funzionamento una frequenza propria dello strumento di misura molto maggiore della massima frequenza da analizzare, e quindi possono essere realizzati con dispositivi piccoli e leggeri (a grande rigidità e massa ridotta).

L'affidabilità e la robustezza delle grandezze osservate dipende dalla misura in cui i seguenti aspetti sono stati debitamente valutati durante l'acquisizione della risposta:

- la precisione dei sensori;
- l'influenza dei parametri ambientali (temperatura, umidità, . . .);
- la consistenza del sistema d'acquisizione (numero di sensori utilizzati e loro posizionamento, ridondanza delle misure);
- la coerenza temporale (sincronizzazione) delle registrazioni.

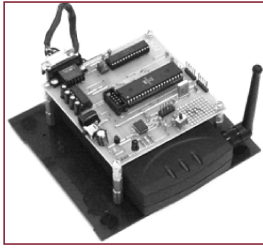


Figura 2.1: Prototipo accademico di sensore wireless (10 cm x 10 cm x 5 cm).

Gli sviluppi recenti nella tecnologia dei trasduttori hanno contribuito fortemente all'implementazione al vero delle tecniche d'identificazione strutturale dinamica; in particolare, l'innovazione più significativa è stata l'introduzione intorno agli anni 2000 di reti di sensori *wireless*. Si tratta di sistemi di acquisizione utilizzabili su tutti i tipi di trasduttori e che, rispetto alla più classica tecnologia *cablata*, presentano una serie di vantaggi significativi, tra cui la semplicità e la velocità dell'installazione. Gli svantaggi sono, invece, le difficoltà nella sincronizzazione dei dati e il contenimento della spesa energetica nel trasferimento dei dati con la comunicazione radio; studi recenti, basati sull'*energy harvesting* e sull'implementazione *on-board* di software atti a ridurre la mole di dati da trasferire, hanno permesso di ridurre l'impatto di questi svantaggi. Un prototipo accademico di sensore wireless sviluppato da Jerome P. Lynch nel 2002 è quello riportato in Figura 2.1. In genere, nell'ambito delle strutture, i sensori wireless sono interfacciati con accelerometri miniaturizzati, noti come *Micro-Electro-Mechanical Systems*. Analisi prestazionali comparative sulla sensoristica wireless sono riportate in [2.11] e nel più recente lavoro [2.15].

2.3 Analisi del segnale

La teoria dei segnali è la disciplina che studia le proprietà matematiche e statistiche di un segnale, inteso come variazione temporale di una grandezza fisica o dello stato fisico di un sistema. Due aspetti cruciali nella teoria dei segnali sono la quantità di segnale utile rispetto al rumore e la possibilità di mappare un segnale, per definizione operante nel dominio del tempo, nel dominio delle frequenze.

Nei paragrafi che seguono si richiama dapprima il concetto di rapporto segnale/rumore e poi la teoria dell'analisi di Fourier [2.10, 2].

2.3.1 Rapporto segnale/rumore

Nell'analisi dei segnali, il rapporto segnale/rumore è una misura adimensionale della quantità di rumore contenuta in un segnale. Nelle applicazioni al vero è un contributo sempre presente, la cui entità dipende dal trattamento delle diverse fonti di rumore; nelle applicazioni numeriche la sua presenza è generalmente simulata tramite generazione randomica su una distribuzione gaussiana standard.

Per **SNR** (*Signal to Noise Ratio*) si intende il rapporto tra la potenza del segnale utile P_{utile} e quella del rumore P_{rumore} :

$$SNR = \frac{P_{utile}}{P_{rumore}} \quad 0 \leq SNR < \infty \quad (2.5)$$

ove un valore nullo dell'SNR indica l'assenza di segnale utile, mentre un valore ∞ indica l'assenza di rumore. Il rapporto segnale/rumore è spesso espresso in *decibel*:

$$SNR_{dB} = 10 \log_{10} SNR = 10 \log_{10} \left(\frac{P_{utile}}{P_{rumore}} \right) \quad -\infty \leq SNR_{dB} < \infty \quad (2.6)$$

Ricordando la definizione di potenza e valore quadratico medio **RMS** (*Root Mean Square*) di un segnale:

$$P = \frac{1}{T_c} \int_0^{T_c} y(t)^2 dt \quad RMS = \sqrt{\frac{1}{T_c} \int_0^{T_c} y(t)^2 dt} = \sqrt{P} \quad (2.7)$$

con T_c l'intervallo di osservazione del segnale, si ricava:

$$SNR = \frac{P_{utile}}{P_{rumore}} = \left(\frac{RMS_{utile}}{RMS_{rumore}} \right)^2 = \frac{1}{NL^2} \quad NL = \frac{RMS_{rumore}}{RMS_{utile}} \quad (2.8)$$

relazione utile nel caso si voglia ricavare il rapporto segnale/rumore a partire dal livello di rumore NL , sovente espresso in termini percentuali, e definito come il rapporto tra il valore quadratico medio del rumore RMS_{rumore} e quello del segnale utile RMS_{utile} .

Per segnali a tempo discreto, le relazioni precedenti sono ugualmente valide, a eccezione delle definizioni di potenza e valore quadratico medio riportate nella (2.7), che nella versione discreta si esprimono come:

$$P = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N y_k^2 \quad RMS = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N y_k^2} = \sqrt{P} \quad (2.9)$$

essendo N il numero di campioni.

2.3.2 Analisi di Fourier

L'analisi di Fourier è uno strumento basilare nell'identificazione strutturale dinamica; per questo motivo, e anche allo scopo di introdurre in forma agevole alcuni concetti della teoria dei segnali di cui si farà uso nel seguito, se ne riassumono le nozioni fondamentali.

2.3.2.1 Serie di Fourier

Dato un segnale $y(t)$ periodico di periodo T è possibile rappresentarlo tramite una *serie di Fourier*, che nella *forma rettangolare* si scrive:

$$y(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)) \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \quad (2.10)$$

essendo f la frequenza e ω la frequenza angolare; i coefficienti della serie sono pari a:

$$\begin{cases} a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T y(t) dt \\ a_n = \frac{2}{T} \int_0^T y(t) \cos(n\omega t) dt \\ b_n = \frac{2}{T} \int_0^T y(t) \sin(n\omega t) dt \end{cases} \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.11)$$

Della precedente (2.10) è possibile fornire due rappresentazioni alternative. La prima, nota come *forma polare*, si scrive:

$$y(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(n\omega t + \varphi_n) \quad (2.12)$$

con:

$$c_0 = a_0 \quad c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \quad \varphi_n = \arctan \frac{-b_n}{a_n} \quad (2.13)$$

La seconda, nota come *forma complessa* e ampiamente utilizzata, si scrive invece:

$$y(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} Y_n e^{in\omega t} \quad (2.14)$$

ove $i = \sqrt{-1}$ rappresenta l'unità immaginaria e la quantità Y_n ¹:

$$Y_n = \frac{1}{T} \int_0^T y(t) e^{-in\omega t} dt \quad Y_{-n} = Y_n^* \quad (2.15)$$

ovvero:

$$\begin{cases} Y_0 = a_0 \\ \Re(Y_n) = a_n/2 \\ \Im(Y_n) = -b_n/2 \end{cases} \quad (2.16)$$

e anche:

$$\begin{cases} Y_0 = c_0 \\ |Y_n| = \sqrt{\Re(Y_n)^2 + \Im(Y_n)^2} = c_n/2 \\ \arctan \frac{\Im(Y_n)}{\Re(Y_n)} = \varphi_n \end{cases} \quad (2.17)$$

La serie di Fourier è pertanto uno strumento che permette di scomporre un segnale periodico in una serie di sinusoidi con frequenze angolari $n\omega$, ampiezze c_n e fasi φ_n . Gli andamenti dei valori delle ampiezze e delle fasi in funzione delle frequenze, sono detti rispettivamente *spettro d'ampiezza* e *spettro di fase*. Si consideri, ad esempio, il segnale $y = 3 \cos(\Omega t) + \sin(2\Omega t) + 2 \sin(3\Omega t)$, con $\Omega = 1$ rad/s, periodico di periodo $T = 2\pi$ s, e i corrispondenti spettri d'ampiezza e di fase riportati in Figura 2.2.

¹Complesso coniugato: si utilizza l'asterisco per indicare il complesso coniugato.

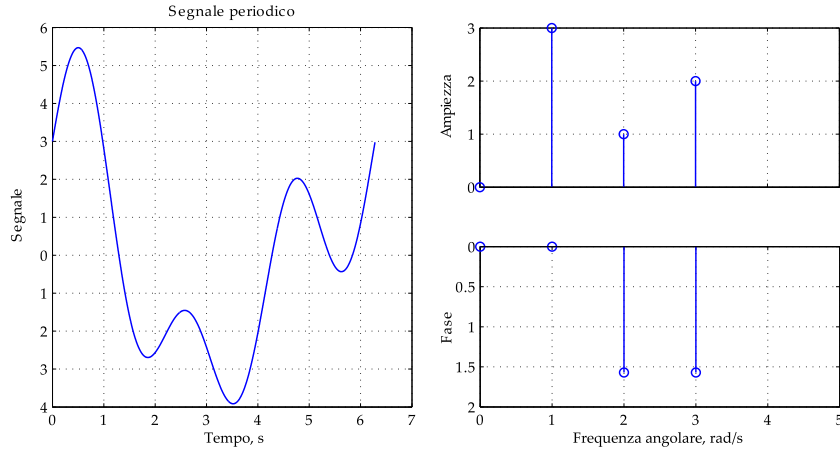


Figura 2.2: Spettri di Fourier di un segnale periodico.

2.3.2.2 Trasformata di Fourier

Per mappare un segnale continuo non periodico nel dominio delle frequenze si utilizzano le *trasformate integrali*, ovvero applicazioni, comunemente lineari, di uno spazio di funzioni su un altro definite per mezzo di un integrale. Denominato con $y(t)$ il segnale, l'espressione generale di una trasformata integrale lineare $\mathcal{T}(y)$ è del tipo:

$$\mathcal{T}(y) = \int_A^B y(t)K(s, t)dt \quad (2.18)$$

ove $K(s, t)$ è una funzione detta nucleo o kernel caratterizzante la trasformazione. Anche gli estremi d'integrazione A e B dipendono dal tipo di trasformata, anche se spesso almeno uno o entrambi tendono a infinito, generando integrali del tipo improprio.

Il caso più diffuso di trasformata integrale (2.18) è quello in cui gli estremi A e B tendono a $-\infty$ e ∞ , rispettivamente, mentre il nucleo $K(s, t)$ è posto pari e^{-ist} . Tale caso, noto come *trasformata di Fourier* o *F-trasformata*, si scrive pertanto:

$$\mathcal{F}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t)e^{-ist}dt \quad (2.19)$$

Per questioni di comodo, è conveniente sostituire nella (2.19) la variabile ω alla generica variabile s e introdurre la costante moltiplicativa $1/(2\pi)$, ottenendo la seguente versione della trasformata di Fourier:

$$Y(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} y(t)e^{-i\omega t}dt \quad Y(-\omega) = Y(\omega)^* \quad (2.20)$$

Nota la trasformata di Fourier di un segnale, per ricostruire il segnale originario è sufficiente applicare la *trasformata inversa* (o *antitrasformata*) di Fourier:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} Y(\omega)e^{i\omega t}d\omega \quad (2.21)$$

Dal confronto tra la (2.20) e la (2.15), e la (2.21) e la (2.14), si evince che la trasformata di Fourier può interpretarsi come la generalizzazione della teoria della serie di Fourier al caso di segnali non periodici, comprendendo i periodici come caso particolare (sovente si parla anche di analisi di Fourier o analisi armonica).

Analogamente a quanto già detto per la serie di Fourier, la (2.20) e la (2.21) rappresentano la forma complessa della trasformata e dell'antitrasformata di Fourier, ma è possibile utilizzare due rappresentazioni alternative, quali la rettangolare e la polare. La prima si scrive:

$$y(t) = \int_0^\infty (A(\omega) \cos(\omega t) + B(\omega) \sin(\omega t)) d\omega \quad (2.22)$$

essendo i coefficienti pari a:

$$\begin{cases} A(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty y(t) \cos(\omega t) dt \\ B(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty y(t) \sin(\omega t) dt \end{cases} \quad (2.23)$$

ovvero:

$$\Re(Y(\omega)) = A(\omega)/2 \quad \Im(Y(\omega)) = -B(\omega)/2 \quad (2.24)$$

La forma polare si scrive invece:

$$y(t) = \int_0^\infty C(\omega) \cos(\omega t + \Phi(\omega)) d\omega \quad (2.25)$$

con:

$$C(\omega) = \sqrt{A(\omega)^2 + B(\omega)^2} \quad \Phi(\omega) = \arctan \frac{-B(\omega)}{A(\omega)} \quad (2.26)$$

e anche:

$$\begin{cases} |Y(\omega)| = \sqrt{\Re(Y(\omega))^2 + \Im(Y(\omega))^2} = C(\omega)/2 \\ \arctan \frac{\Im(Y(\omega))}{\Re(Y(\omega))} = \Phi(\omega) \end{cases} \quad (2.27)$$

La trasformata di Fourier è pertanto uno strumento che permette di scomporre un segnale non periodico in una serie di sinusoidi con frequenze angolari ω , ampiezze C e fasi Φ . Come per la serie di Fourier, gli andamenti dei valori delle ampiezze e delle fasi in funzione delle frequenze, sono detti rispettivamente *spettro d'ampiezza* e *spettro di fase*. La differenza rispetto alla serie di Fourier è che nel caso in cui il segnale sia non periodico gli spettri sono continui anziché discreti; un'ulteriore differenza è che mentre per la serie di Fourier l'ampiezza delle armoniche si esprime nella stessa unità di misura del segnale (si veda la (2.14)), per la trasformata di Fourier se il segnale è espresso in una data unità di misura U , l'ampiezza si esprime in Us , come testimonia

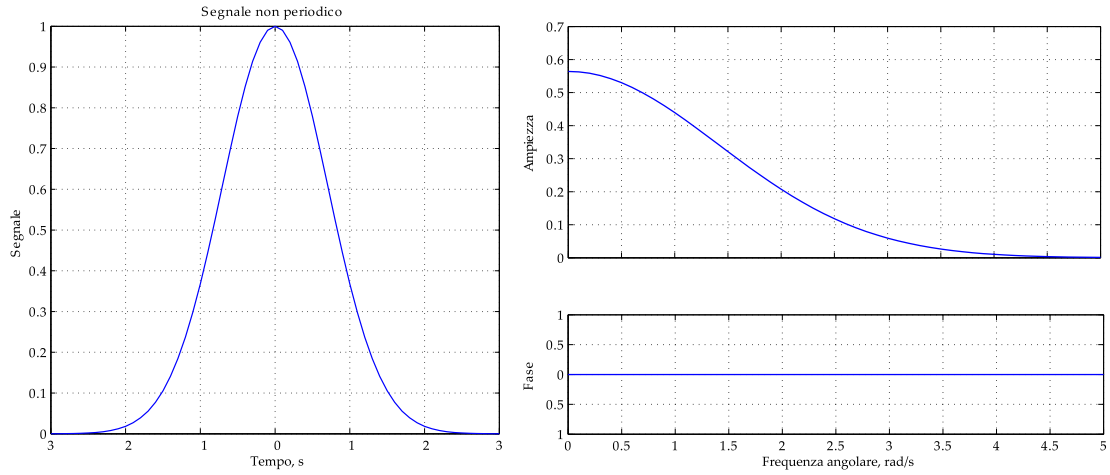


Figura 2.3: Spettri di Fourier di un segnale non periodico.

la (2.21). Si consideri, ad esempio, il segnale non periodico $y = e^{-t^2}$ di Figura 2.3. La trasformata di Fourier di tale segnale vale:

$$Y(\omega) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-\omega^2/4} \quad (2.28)$$

cui corrispondono gli spettri d'ampiezza e di fase riportati nella stessa Figura 2.3.

2.3.2.3 Trasformata discreta di Fourier

La *trasformata discreta di Fourier*, anche detta **DFT** (*Discrete Fourier Transform*), e la *antitrasformata discreta di Fourier*, anche detta **IDFT** (*Inverse Discrete Fourier Transform*), permettono di eseguire l'analisi di Fourier su un dominio discreto e limitato di N intervalli e $y_0, y_1, \dots, y_{N-1}$ misure:

$$y_k = y(t_k) \quad t_k = \frac{T_c}{N} k \quad k = 0, \dots, N-1 \quad (2.29)$$

con T_c l'intervallo di osservazione del segnale. In particolare, la versione discreta della trasformata e dell'antitrasformata di Fourier si scrivono rispettivamente:

$$\begin{cases} Y_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} y_k e^{-\frac{2\pi i}{N} nk} & n = 0, \dots, N-1 \\ Y_{N-n} = Y_n^* & n = 1, \dots, N-1 \end{cases} \quad (2.30)$$

e:

$$y_k = \sum_{n=0}^{N-1} Y_n e^{\frac{2\pi i}{N} nk} \quad k = 0, \dots, N-1 \quad (2.31)$$

Analogamente a quanto già visto per la serie e la trasformata di Fourier, la (2.30) e la (2.31) rappresentano la forma complessa della trasformata e dell'antitrasformata

discreta di Fourier, ma sono possibili le due rappresentazioni alternative rettangolare e polare. La prima si scrive:

$$y_k = a_0 + \sum_{n=1}^{N^*/2} \left(a_n \cos \frac{2\pi nk}{N} + b_n \sin \frac{2\pi nk}{N} \right) \quad k = 0, \dots, N-1 \quad (2.32)$$

essendo N^* :

$$N^* = \begin{cases} N & \text{se } N \text{ pari} \\ N-1 & \text{se } N \text{ dispari} \end{cases} \quad (2.33)$$

e i coefficienti pari a:

$$\begin{cases} a_0 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} y_k \\ a_n = \frac{2}{N} \sum_{k=0}^{N-1} y_k \cos \frac{2\pi nk}{N} \\ b_n = \frac{2}{N} \sum_{k=0}^{N-1} y_k \sin \frac{2\pi nk}{N} \end{cases} \quad n = 1, \dots, N-1 \quad (2.34)$$

ovvero:

$$\begin{cases} Y_0 = a_0 \\ \Re(Y_n) = a_n/2 \\ \Im(Y_n) = -b_n/2 \end{cases} \quad (2.35)$$

La forma polare si scrive invece:

$$y_k = c_0 + \sum_{n=1}^{N^*/2} \left(c_n \cos \frac{2\pi nk}{N} + \varphi_n \right) \quad k = 0, \dots, N-1 \quad (2.36)$$

con:

$$c_0 = a_0 \quad c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \quad \varphi_n = \arctan \frac{-b_n}{a_n} \quad (2.37)$$

e anche:

$$\begin{cases} Y_0 = c_0 \\ |Y_n| = \sqrt{\Re(Y_n)^2 + \Im(Y_n)^2} = c_n/2 \\ \arctan \frac{\Im(Y_n)}{\Re(Y_n)} = \varphi_n \end{cases} \quad (2.38)$$

Si può dimostrare che, se si valutasse la DFT per tutti gli interi k , anziché per $k = 0, \dots, N-1$, la successione infinita che ne risulterebbe sarebbe un'estensione periodica della DFT², con periodo pari all'intervallo di osservazione T_c , vedi Figura 2.4; questo spiega anche perché il valore y_N non appaia mai nelle equazioni della DFT: esso è vincolato, per definizione a coincidere con y_0 .

²Trasformata di Fourier a tempo discreto: per l'analisi di Fourier di segnali definiti su un dominio discreto ma illimitato esiste la trasformata di Fourier a tempo discreto che, a differenza di quanto avviene per la DFT, permette di rimuovere la periodicità del segnale. Tale trasformata non ha grande rilievo applicativo, vista la scarsa necessità di operare su un dominio discreto e illimitato.

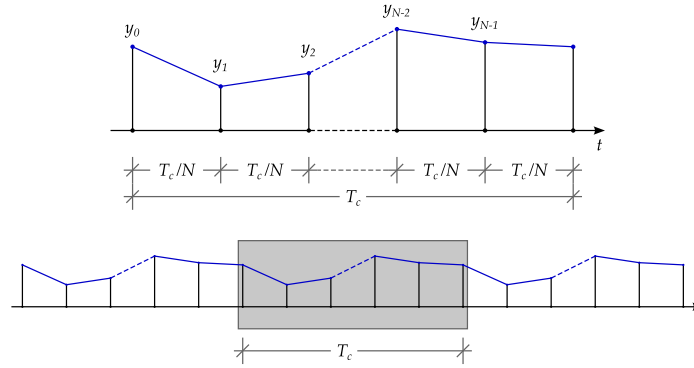


Figura 2.4: Discretizzazione e periodicità di un segnale analizzato con la DFT.

Assegnata una *frequenza di campionamento* $f_s = N/T_c$, per definizione, la DFT fornisce N valori Y_n , ognuno dei quali rappresentativo di un *frequency bin* (scomparto di frequenza). Volendo analizzare i risultati in termini spettrali, così come già fatto per la serie e la trasformata di Fourier, si deve utilizzare l'equivalenza di facile dimostrazione:

$$\omega = n \frac{2\pi}{T_c} \quad n = 0, \dots, N-1 \quad (2.39)$$

nel caso di forma esponenziale, ovvero:

$$\omega = n \frac{2\pi}{T_c} \quad n = 0, \dots, N^*/2 \quad (2.40)$$

per le rappresentazioni rettangolare e polare (si vedano la (2.32) e la (2.36)). In particolare, la (2.40) fornisce l'intervallo di variazione dello spettro d'ampiezza e dello spettro di fase:

$$0 \leq \omega \leq \begin{cases} f_s \pi & \text{se } N \text{ pari} \\ \frac{f_s \pi (N-1)}{N} & \text{se } N \text{ dispari} \end{cases} \quad (2.41)$$

ovvero, più significativamente:

$$0 \leq f \leq \begin{cases} \frac{f_s}{2} & \text{se } N \text{ pari} \\ \frac{f_s (N-1)}{2N} & \text{se } N \text{ dispari} \end{cases} \quad (2.42)$$

Circa l'unità di misura, così come per la serie di Fourier, l'ampiezza delle armoniche si esprime nella stessa unità di misura del segnale (si veda la (2.31)), a differenza di quanto riscontrato per la trasformata di Fourier.

Nella teoria dei segnali si distinguono segnali *analogici*, definiti su un dominio continuo e illimitato, e *digitali*, definiti su un insieme discreto e limitato. La serie e la

trasformata di Fourier sono pertanto destinate all'analisi di segnali analogici, mentre la trasformata discreta di Fourier, DFT, a segnali digitali. Da un punto di vista applicativo, poiché i segnali sono acquisiti con letture a un intervallo di tempo finito, ovvero sono segnali digitali, la DFT rappresenta lo strumento d'analisi di riferimento. Tuttavia, per una corretta applicazione e interpretazione della trasformata discreta di Fourier è necessario tenere conto di una serie di aspetti che, se non opportunamente considerati, possono mistificare il reale contenuto spettrale di un segnale; un'esposizione dei concetti basilari legati all'utilizzo della DFT è riportata nell'Appendice A.

2.3.2.4 Quadro di sintesi sull'analisi di Fourier

È possibile fornire un quadro di sintesi sull'analisi di Fourier e, nello specifico, riconoscere una visione unitaria della diretta corrispondenza esistente tra le caratteristiche di un segnale e quelle del relativo spettro d'ampiezza.

Suddividendo i segnali in tempo continuo e tempo discreto, e in periodici e aperiodici, le caratteristiche delle descrizioni frequenziali possono così riassumersi:

- se il segnale è periodico nel tempo, esso possiede uno spettro discreto;
- se il segnale è discreto nel tempo, esso possiede uno spettro periodico.

Tali proprietà di dualità tra i domini di tempo e frequenza sono esemplificate in Figura 2.5.

2.3.3 Altre tecniche di analisi del segnale

L'analisi di Fourier descritta in precedenza permette di mappare un dato segnale nel dominio delle frequenze e rappresenta lo strumento di riferimento per lo studio delle risposte strutturali dinamiche. Tuttavia, nella teoria dei segnali sono disponibili anche numerosi metodi di analisi nel dominio del tempo; tra i più diffusi vi sono l'*Auto-Regressive*, il *Moving-Average*, l'*Auto-Regressive Moving-Average* e loro varianti. Una terza categoria, di più recente diffusione, è infine costituita dalle tecniche d'analisi del segnale nel dominio tempo-frequenza. Di tale categoria, cui appartengono, ad esempio, la *trasformata di Fourier a tempo breve*, la *trasformata Wavelet* e la *trasformata di Hilbert*, si discuterà ampiamente nella terza parte della tesi.

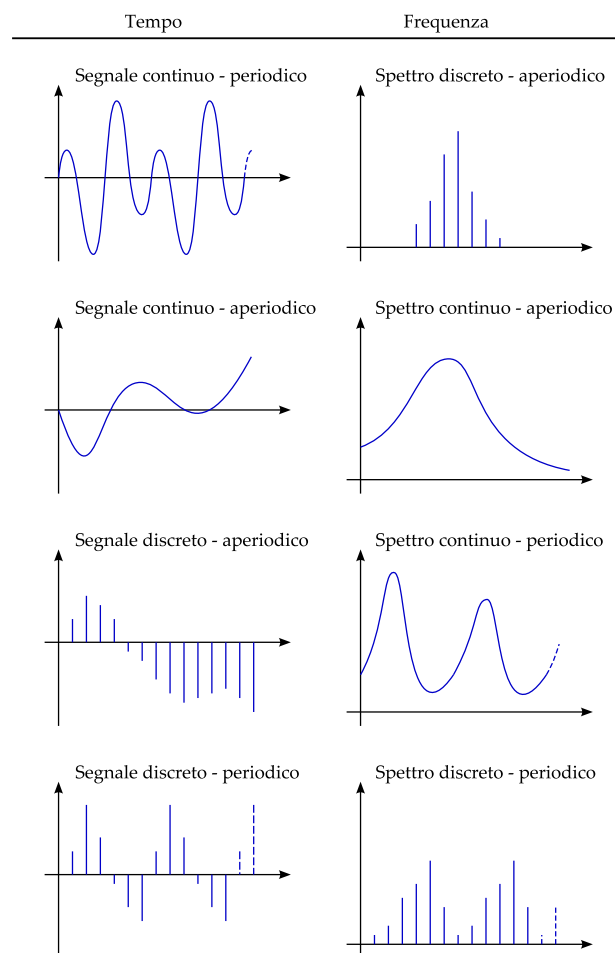


Figura 2.5: Caratteristiche dei segnali e corrispondenti descrizioni spettrali.

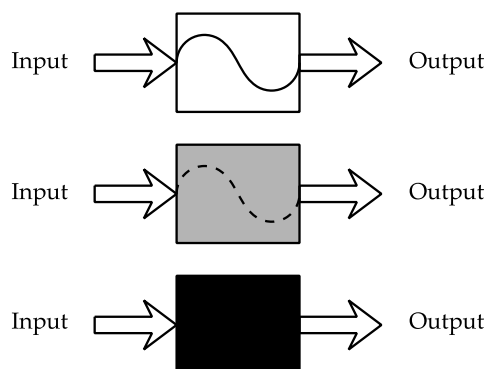


Figura 2.6: Classificazione dei modelli: in alto parametrico, al centro semi-parametrico, in basso non-parametrico.

2.4 Classificazione dei modelli

Per desumere le caratteristiche meccaniche delle strutture a partire dalle grandezze osservate nelle fasi di acquisizione ed elaborazione dati, possono utilizzarsi differenti modelli:

- modello parametrico:
 - modello fisico;
 - modello delle funzioni di trasferimento;
 - modello modale;
- modello semi-parametrico;
- modello non-parametrico.

I modelli fisici, delle funzioni di trasferimento, e modale, sono anche detti *parametrici* o *white box*, giacché fondati sulla conoscenza delle leggi fisiche che caratterizzano la risposta di una struttura. In alternativa, è possibile utilizzare modelli strutturali *non-parametrici*, che prevedono di stabilire un legame funzionale tra le grandezze in ingresso e in uscita svincolato dalle teorie strutturali che reggono la fisica del problema. Proprio per la natura indipendente del modello, si parla pure di modelli *black box*. Una soluzione intermedia tra le precedenti è la classe dei modelli *semi-parametrici* o *gray box*, nei quali è ipotizzata una conoscenza parziale dei principi fisici del modello strutturale, come esemplificato in Figura 2.6.

I modelli di più ampio utilizzo nell'ambito strutturale sono quelli parametrici, cui sono dedicati i paragrafi che seguono.

2.4.1 Modello parametrico fisico

A partire dalle equazioni del moto dell'intera struttura e utilizzando una delle tecniche di discretizzazione disponibili, si può scrivere:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{u}(t) = \mathbf{f}(t) \quad (2.43)$$

con $\mathbf{M}$, $\mathbf{C}$ e $\mathbf{K}$ matrici di massa, smorzamento (viscoso) e rigidità, $\mathbf{u}(t)$ e $\mathbf{f}(t)$ vettori colonna dello spostamento e delle azioni esterne.

L'equazione (2.43), suscettibile della seguente rappresentazione in forma matriciale (si omette, per brevità, la dipendenza esplicita dal tempo):

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & \dots & M_{1n} \\ M_{21} & M_{22} & \dots & M_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{n1} & M_{n2} & \dots & M_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \\ \vdots \\ \ddot{u}_n \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \dots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \dots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \dots & C_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \\ \vdots \\ \dot{u}_n \end{Bmatrix} + \\ & + \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \dots & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} & \dots & K_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{n1} & K_{n2} & \dots & K_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{Bmatrix} \quad (2.44) \end{aligned}$$

descrive un modello strutturale a n gradi di libertà noto come *modello fisico* o *modello spaziale* (dato che anche i modelli delle funzioni di trasferimento e modale sono spaziali, quest'ultima denominazione, pure utilizzata in letteratura, non è del tutto appropriata).

2.4.2 Modello parametrico delle funzioni di trasferimento

Si definisce *modello delle funzioni di trasferimento* o *modello della risposta in frequenza*, un modello governato dalla seguente equazione:

$$\mathbf{u}(\omega) = \mathbf{H}(\omega)\mathbf{f}(\omega) \quad (2.45)$$

con $\mathbf{H}(\omega)$ matrice delle funzioni di trasferimento.

Omettendo, per brevità, la dipendenza esplicita dalla frequenza, l'equazione (2.45) si può esplicitare nella forma:

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & \dots & H_{1n} \\ H_{21} & H_{22} & \dots & H_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{n1} & H_{n2} & \dots & H_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{Bmatrix} \quad (2.46)$$

FRF	Definizione	Relazione
Recettanza (admittance, compliance, dynamic flexibility, receptance)	Spostamento / Forza	$\mathbf{H}(\omega)$
Mobilità (mobility)	Velocità / Forza	$i\omega\mathbf{H}(\omega)$
Inertanza (accelerance, inertance)	Accelerazione / Forza	$-\omega^2\mathbf{H}(\omega)$
Rigidezza dinamica (dynamic stiffness)	Forza / Spostamento	$\mathbf{H}(\omega)^{-1}$
Impedenza meccanica (mechanical impedance)	Forza / Velocità	$\frac{1}{i\omega}\mathbf{H}(\omega)^{-1}$
Massa apparente (apparent mass)	Forza / Accelerazione	$\frac{1}{-\omega^2}\mathbf{H}(\omega)^{-1}$

Tabella 2.2: Classificazione delle FRF.

dove le grandezze H_{ij} prendono il nome di *funzioni di trasferimento* o *recettanze* o *funzioni di risposta in frequenza* **FRF** (*Frequency Response Function*), e rappresentano il rapporto tra lo spostamento $u_i(\omega)$ di un dato punto i della struttura e l'azione $f_j(\omega)$ applicata in un punto j che lo ha causato ($i, j = 1, \dots, n$). La matrice delle funzioni di trasferimento e le matrici di massa, smorzamento e rigidezza del modello fisico sono correlate dalla relazione:

$$\mathbf{H}(\omega) = (\mathbf{K} - \omega^2\mathbf{M} + i\omega\mathbf{C})^{-1} \quad (2.47)$$

Talune volte, si utilizzano versioni alternative delle funzioni di trasferimento, in particolare, in letteratura sono diffuse le definizioni riportate in Tabella 2.2; è importante sottolineare che, nota una di queste FRF, è immediato ricavare tutte le altre.

Detta H_{ij} la funzione di risposta in frequenza, la sua controparte nel dominio del tempo, solitamente indicata con h_{ij} e formalmente pari alla trasformata inversa di Fourier della FRF, è detta *funzione di risposta all'impulso* **IRF** (*Impulse Response Function*).

2.4.3 Modello parametrico modale

Ammettendo che la matrice di smorzamento che appare nella (2.43) sia rappresentativa di uno smorzamento classico, ovvero del tipo:

$$\mathbf{C} = \mathbf{M} \sum_{p=0}^{n-1} a_p (\mathbf{M}^{-1} \mathbf{K})^p \quad (2.48)$$

la soluzione delle equazioni del moto può ottenersi nell'ambito dell'analisi modale. Utilizzando i modi di vibrare ϕ_i o, equivalentemente, la matrice modale $\Phi = [\phi_1, \dots, \phi_n]$, tali che:

$$\mathbf{u}(t) = \sum_{i=1}^n \phi_i q_i(t) = \Phi \mathbf{q}(t) \quad (2.49)$$

si ottiene infatti:

$$\Phi^T \mathbf{M} \Phi \ddot{\mathbf{q}}(t) + \Phi^T \mathbf{C} \Phi \dot{\mathbf{q}}(t) + \Phi^T \mathbf{K} \Phi \mathbf{q}(t) = \mathbf{p}(t) \quad (2.50)$$

ove il vettore colonna $\mathbf{p}(t)$, detto delle forze modali, è definito come:

$$\mathbf{p}(t) = \Phi^T \mathbf{f}(t) \quad (2.51)$$

Si dimostra che le matrici $\Phi^T \mathbf{M} \Phi$, $\Phi^T \mathbf{C} \Phi$ e $\Phi^T \mathbf{K} \Phi$, dette rispettivamente matrici modali di massa, smorzamento e rigidità, sono matrici diagonali. Pertanto, omettendo la dipendenza esplicita dal tempo, si può scrivere:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} m_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & m_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & m_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \\ \vdots \\ \ddot{q}_n \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & c_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & c_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{Bmatrix} + \\ & + \begin{bmatrix} k_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & k_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & k_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (2.52)$$

ovvero n equazioni differenziali disaccoppiate del tipo:

$$m_i \ddot{q}_i + c_i \dot{q}_i + k_i q_i = p_i \quad i = 1, \dots, n \quad (2.53)$$

Solitamente, le (2.53) sono presentate nella forma:

$$\ddot{q}_i + 2\xi_i \omega_i \dot{q}_i + \omega_i^2 q_i = p_i/m_i \quad i = 1, \dots, n \quad (2.54)$$

con:

$$\xi_i = \frac{c_i}{2m_i \omega_i} = \frac{c_i}{2\sqrt{m_i k_i}} \quad \omega_i = \sqrt{\frac{k_i}{m_i}} \quad (2.55)$$

rispettivamente, fattore di smorzamento e frequenza angolare (o pulsazione) dell' i -esimo modo.

2.5 Tecniche d'identificazione dinamica

L'identificazione è l'insieme dei metodi e degli algoritmi che consentono di analizzare dei dati in ingresso e in uscita per ottenere un certo modello; in letteratura esistono numerose tecniche d'identificazione dinamica delle strutture. Molte di queste sono fondate sull'ipotesi che in corrispondenza delle condizioni di risonanza la risposta strutturale sia dominata dal solo modo di vibrare corrispondente alla risonanza e che, quindi, il contributo degli altri modi sia trascurabile; si parla anche di tecniche SDoF. In alcuni casi l'ipotesi è rilassata ammettendo che il contributo degli altri modi non sia pari a zero, ma a una costante; se l'ipotesi viene rimossa, si parla, invece, di tecniche MDoF, particolarmente utili per frequenze strutturali prossime. Giova ricordare che gli acronimi SDoF e MDoF utilizzati in questo ambito hanno un significato diverso da quello relativo agli effettivi gradi di libertà di una struttura: una struttura SDoF è identificata con tecniche SDoF, ma una struttura MDoF può essere identificata tanto con tecniche MDoF che SDoF.

Inoltre, sulla base del numero di grandezze in ingresso e in uscita, si utilizza la seguente classificazione delle tecniche d'identificazione, mutuata dal linguaggio tecnico tipico della teoria dei segnali:

- SISO Single Input-Single Output, se presenta un unico ingresso e un'unica uscita;
- SIMO Single Input-Multiple Outputs, se presenta un unico ingresso ma più uscite;
- MISO Multiple Inputs-Single Output, se presenta più ingressi ma un'unica uscita;
- MIMO Multiple Inputs-Multiple Outputs, se presenta più ingressi e più uscite.

In altri termini, il caso MIMO può considerarsi il più generale, mentre gli altri tre delle degenerazioni in cui gli input e/o gli output si riducono a una grandezza singola, vedi Figura 2.7. Alla categoria MIMO o MISO appartengono anche le tecniche note come *only-output*, nelle quali vengono effettuate delle registrazioni in uscita, senza applicare alcuna grandezza in ingresso, ma sfruttando le sole azioni ambientali.

Ricordando anche quanto riportato in precedenza sulle prime tre fasi dell'identificazione dinamica, si possono sintetizzare le principali informazioni che caratterizzano la formulazione di una tecnica d'identificazione dinamica:

- l'eccitazione dinamica (sinusoidale semplice, sinusoidale a frequenza variabile, periodica, casuale o impulsiva) e la risposta dinamica (grandezze cinematiche: spostamenti, velocità e/o accelerazioni; e/o grandezze tenso-deformative: deformazioni, forze e/o pressioni);

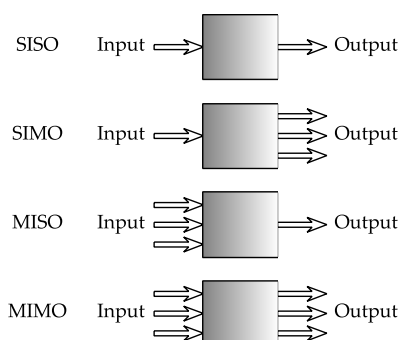


Figura 2.7: Tecniche d'identificazione.

- il dominio della tecnica di analisi del segnale (tempo, frequenza o tempo-frequenza);
- il modello utilizzato (parametrico: fisico, delle funzioni di trasferimento o modale; semi-parametrico o non-parametrico);
- l'ipotesi di partecipazione modale (SDoF o MDoF) e il numero di quantità in ingresso e in uscita (SISO, SIMO, MISO o MIMO).

Tutte queste informazioni contribuiscono, in varia misura, alla capacità predittiva della tecnica; ulteriori indicazioni sulle tecniche esistenti sono fornite nei paragrafi che seguono.

2.5.1 Tecniche consolidate

La maggior parte delle tecniche d'identificazione strutturale dinamica utilizzano il modello delle funzioni di trasferimento per risalire alle caratteristiche del modello modale; con riferimento al caso di eccitazione nota (caso input-output), si parla più specificatamente di **EMA** (*Experimental Modal Analysis*). Tra le tecniche EMA più diffuse vi sono il *Peak Picking* e il *Circle fit*, nel dominio delle frequenze, e l'*Ibrahim Time Domain* e l'*Eigensystem Realization Algorithm*, nel dominio del tempo. Chiaramente, l'elenco non è affatto esaustivo; tra i testi più accreditati sul tema si citano [2.6, 12, 14], più dedicati alle analisi nel dominio delle frequenze, e [2.9, 7], focalizzati maggiormente sul dominio del tempo.

Anche nel caso di eccitazione ambientale (caso only-output), i modelli parametrici modali sono i più diffusi, nel qual caso si parla più specificatamente di **OMA** (*Operational Modal Analysis*). Le due tecniche classiche d'identificazione OMA sono la *Frequency Domain Decomposition* [2.4], nel dominio delle frequenze, e la *Stochastic Subspace Identification* [2.13], nel dominio del tempo. In [2.13], è anche fatto notare come molte delle

tecniche output-only possano ottenersi tramite semplici manipolazioni delle tecniche input-output³.

2.5.2 Sviluppi recenti

Molti lavori della letteratura recente hanno focalizzato l'attenzione sull'identificazione dinamica non lineare. Interpretare gli aspetti strutturali legati alle non linearità di una risposta dinamica è un problema indubbiamente impegnativo, sia perché vengono meno i modelli parametrici discussi in precedenza, sia per le intrinseche difficoltà legate alle diverse fonti di non linearità (geometriche, costitutive, inerziali, di vincolo piuttosto che di carico). Informazioni dettagliate sul tema possono trovarsi nel testo di riferimento [2.18], oltre che nell'ampia review [2.8]; tuttavia, non esiste una trattazione unificata della materia e ognuna delle tecniche esistenti è in genere capace di descrivere e individuare solo alcune delle non linearità presenti, circostanza che spesso favorisce il ricorso a modelli semplificati a un grado di libertà [2.5].

Il lavoro di tesi si concentra su un'ulteriore tematica d'interesse: l'identificazione dinamica di strutture a parametri incerti. La natura probabilistica di una struttura può, infatti, essere un fattore cruciale, specialmente quando si è interessati alla valutazione della sicurezza strutturale. Anche in questo caso vengono meno i modelli parametrici discussi in precedenza, giacché deterministici. L'argomento è discusso nella seconda parte della tesi, che propone una formulazione basata sulla ricerca di una soluzione asintotica del problema diretto e sulla minimizzazione di una funzione obiettivo attinente il problema inverso.



Bibliografia

- [2.1] Decreto Ministeriale 14/01/2008. *“Approvazione delle nuove norme tecniche per le costruzioni”*. Gazzetta Ufficiale n. 29 del 04/02/2008, Suppl. Ordinario n. 30.
- [2.2] A. Brandt. *“Noise and vibration analysis: signal analysis and experimental procedures”*. John Wiley & Sons, 1^a edizione, 2011.

³Sulla nomenclatura: in [2.13] è anche stabilito che il metodo introdotto in [2.3, 4] sotto il nome di Frequency Domain Decomposition, non è altro che una denominazione nuova di un metodo vecchio.

-
- [2.3] R. Brincker, L. Zhang, e P. Andersen. "Modal identification from ambient response using Frequency Domain Decomposition". 18th International Modal Analysis Conference, IMAC, 2000.
- [2.4] R. Brincker, L. Zhang, e P. Andersen. *Modal identification of output-only systems using frequency domain decomposition*. *Smart Materials and Structures*, 10(3):441–446, 2001.
- [2.5] A. Carrella e D. J. Ewins. "Identifying and quantifying structural nonlinearities in engineering applications from measured frequency response functions". *Mechanical Systems and Signal Processing*, 25(3):1011–1027, 2011.
- [2.6] D. J. Ewins. "Modal testing: theory and practice", volume 2 di *Engineering dynamics series*. Research Studies Press, 1^a edizione, 1984.
- [2.7] J. N. Juang e M. Q. Phan. "Identification and control of mechanical systems". Cambridge University Press, 1^a edizione, 2001.
- [2.8] G. Kerschen, K. Worden, A. F. Vakakis, e J. C. Golinval. "Past, present and future of nonlinear system identification in structural dynamics". *Mechanical Systems and Signal Processing*, 20(1):505–592, 2006.
- [2.9] L. Ljung. "System identification: theory for the user". Pearson Education Canada, 2^a edizione, 1987.
- [2.10] M. Luise e G. M. Vitetta. "Teoria dei segnali". McGraw Hill, 1^a edizione, 1999.
- [2.11] J. P. Lynch e K. J. Loh. "A summary review of wireless sensors and sensor networks for structural health monitoring". *The Shock and Vibration Digest*, 38(2):91–128, 2006.
- [2.12] N. M. M. Maia e J. M. M. Silva. "Theoretical and experimental modal analysis", volume 9 di *Engineering dynamics series*. Research Studies Press, 1^a edizione, 1997.
- [2.13] B. Peeters e G. De Roeck. "Stochastic System Identification for Operational Modal Analysis: a review". *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 123(4):659–667, 2001.
- [2.14] J. M. M. Silva e N. M. M. Maia. "Modal analysis and testing". Springer Netherlands, 1^a edizione, 1999.
- [2.15] B. F. Spencer e C. B. Yun. "Wireless sensor advances and applications for civil infrastructure monitoring". Newmark Structural Engineering Laboratory, 2010.

- [2.16] E. Viola. *“Sistemi continui”*, volume 2 di *Fondamenti di dinamica e vibrazione delle strutture*. Pitagora Editrice Bologna, 1^a edizione, 2001.
- [2.17] E. Viola. *“Sistemi discreti”*, volume 1 di *Fondamenti di dinamica e vibrazione delle strutture*. Pitagora Editrice Bologna, 1^a edizione, 2001.
- [2.18] K. Worden e G. R. Tomlinson. *“Nonlinearity in structural dynamics. Detection, identification and modelling”*. IOP Publishing, 1^a edizione, 2001.

Parte 2: Un approccio perturbativo per l'identificazione dinamica di strutture a parametri incerti

Pagina lasciata intenzionalmente bianca.

Capitolo 3

Problema diretto

3

La dinamica dei sistemi strutturali lineari è governata da un problema agli autovalori, ovvero da frequenze proprie, forme modali e fattori di smorzamento. Se uno o più parametri casuali sono presenti, la soluzione è conseguentemente da ricercare nell'ambito di un problema agli autovalori casuali. Nel capitolo, la soluzione asintotica di questo problema è cercata tramite una tecnica perturbativa.

3.1 Premessa

La casualità delle proprietà meccaniche, fisiche, geometriche e di vincolo di una struttura può essere un fattore cruciale, specialmente quando si è interessati alla valutazione della sicurezza strutturale. In questi casi è necessario sia modellare opportunamente la probabilità dei parametri sia utilizzare un'idonea strategia risolutiva.

Tra gli approcci per l'analisi statica delle strutture con parametri incerti comunque distribuiti si ricordano quelli basati sugli *stochastic finite element* e loro varianti [3.10], oppure su altri metodi di proiezione, come quello presentato in [3.1].

Nell'analisi dinamica la casualità dei parametri implica che il classico approccio agli autovalori non è più sufficiente per la risoluzione del problema dinamico, ma è necessario risolvere un problema agli autovalori casuali. Lo studio delle matrici casuali, e in particolare delle proprietà dei loro autovalori, è peraltro un tema molto

sentito in letteratura, che si è rivelato d'interesse in molteplici applicazioni, in primo luogo nell'analisi dei dati e in fisica nucleare [3.4].

I metodi disponibili in letteratura per la valutazione delle statistiche dell'autosoluzione sono essenzialmente catalogabili in tre gruppi, sulla base della strategia risolutiva utilizzata:

- simulazione Monte Carlo;
- approccio perturbativo;
- calcolo dell'integrale asintotico.

Di queste, la strategia risolutiva più diffusa resta ancora oggi quella basata sulla simulazione Monte Carlo[3.10], in cui si genera un numero di campioni dei parametri incerti e si risolve il problema deterministico relativo a ognuno di questi eventi; le statistiche cercate sono quindi ottenute a partire dall'insieme di queste soluzioni. Se il numero di campioni è *sufficientemente* elevato (ovvero tale da stabilizzare tutte le statistiche d'interesse), il metodo è molto affidabile e accurato; il principale svantaggio è che, specie per sistemi a molti gradi libertà, l'impegno computazionale può risultare tale da rendere la tempistica dell'approccio limitativa[3.14].

Gli approcci perturbativi si basano sullo studio della sensibilità dei modelli strutturali. Tra le proposte di letteratura si ricordano gli approcci basati sullo sviluppo intorno a punti ottimali, detti *improved perturbation method* [3.21, 3], e il metodo di costruzione approssimata della funzione di risposta in frequenza proposto recentemente in [3.22] e basato sulla *Rational Series Expansion*, una variante della serie di Neumann.

Esistono anche approcci differenti, di tipo integrale, come quello proposto in [3.2]: dato un sistema lineare con parametri incerti rappresentati da variabili aleatorie generiche (non gaussiane e/o dipendenti), si valuta dapprima una soluzione approssimata perturbativa dei momenti dell'autosoluzione, e si calcolano poi le corrispondenti distribuzioni tramite il maximum entropy method o utilizzando un fitting su χ^2 ; l'approccio continua a essere approssimato come i metodi perturbativi descritti in precedenza, ma ha il pregio di fornire soluzioni analitiche in forma chiusa delle distribuzioni di probabilità.

Ulteriori indicazioni sulle modellazioni dinamiche di strutture a parametri incerti sono rintracciabili nella review [3.19] e nel più recente documento [3.23].

3.2 Considerazioni preliminari

Sulla modellazione dei parametri casuali, l'incertezza legata alle variabili descrittive di un fenomeno strutturale serve generalmente a stabilire quando la probabilità di un

dato evento superata una determinata soglia. In tale ambito, le difficoltà legate alla valutazione della probabilità corrispondente a parametri con distribuzione generica hanno spinto allo sviluppo di metodi di trasformazione iso-probabilistica, che mappano lo spazio effettivo delle variabili casuali in un nuovo spazio, comunemente detto *spazio standard* [3.15]. Tramite queste trasformazioni, come la trasformazione di Rosenblatt o quella di Nataf, un set di variabili non gaussiane e/o dipendenti può essere trasformato in un set di variabili gaussiane e indipendenti. Questo giustifica in maniera rigorosa l'ipotesi ampiamente adottata in letteratura che le distribuzioni dei parametri d'incertezza siano, per l'appunto, gaussiane e indipendenti; una seconda giustificazione alla congettura, di natura euristica più che matematica, fornita da altri autori è semplicemente la validità del teorema del limite centrale (cfr. Appendice B). Anche se in [3.2] è fatto notare che le trasformazioni iso-probabilistiche possono risultare all'atto pratico complicate e numericamente svenienti, poiché lo scopo della tesi è una formulazione del problema inverso, nel presente documento si ammette che i parametri incerti siano gaussiani e indipendenti, o, per meglio dire, che tale tipo di ipotesi sia sufficientemente accurata per lo studio dell'identificazione dinamica.

Si intende analizzare, quindi, la distribuzione delle autosoluzioni di un problema agli autovalori in forma non standard rappresentativo delle oscillazioni libere di un sistema dinamico lineare discreto o discretizzato in assenza di smorzamento e caratterizzato da uno o più parametri incerti gaussiani e indipendenti (l'ipotesi di assenza di smorzamento, da riguardare come congettura demistificatoria, è comunque condivisa dalla maggioranza della letteratura sul tema in analisi). Come strategia risolutiva si sceglie l'approccio perturbativo, sia per il minore onere computazionale del metodo se confrontato con le simulazioni Monte Carlo e sue varianti, sia per la possibilità di ottenere, rispetto alle formulazioni di tipo integrale, informazioni di tipo qualitativo, oltre che quantitativo, sulla natura della soluzione. Sulle potenzialità dell'approccio perturbativo, basti ricordare che è uno strumento a carattere generale che si è dimostrato fruttuoso in numerose applicazioni [3.20], ad esempio, nell'ambito dinamico deterministico, per la simulazione numerica step-by-step di sistemi soggetti a modifiche strutturali [3.5] e per costruire in dettaglio l'autosoluzione di elementi strutturali semplici in cui si modella un danneggiamento come riduzione di rigidità e massa, tenendo conto dell'effettiva forma dell'area danneggiata [3.8].

Per l'analisi stocastica perturbativa, nel paragrafo precedente si è fatto cenno al metodo di denominato *improved perturbation method*, originariamente proposto per il caso statico [3.9], poi esteso al campo dinamico [3.21] e, infine, alla statica e alla dinamica di sistemi non lineari [3.11]. L'idea di base del metodo è sviluppare la serie intorno a un punto di ottimo della soluzione (scelto imponendo un qualche

criterio di ottimizzazione), piuttosto che intorno alla media del parametro. I risultati di letteratura mostrano che, mentre la valutazione delle medie è poco sensibile a questa versione dell'approccio perturbativo, dei miglioramenti possono ottenersi nelle stime della varianza [3.21]; tuttavia, come precisato in [3.3], il metodo è sostanzialmente pensato per strutture a parametri incerti distribuiti in maniera non gaussiana. Poiché, invece, in questa sede si è scelto di utilizzare parametri normalmente distribuiti, d'ora in avanti si farà riferimento all'approccio perturbativo comunemente inteso.

Tuttavia, la prima questione cui bisogna rispondere una volta scelto un approccio perturbativo è sotto quali condizioni tale tipo di approccio è ammissibile. A tal proposito, in letteratura [3.17, 18] è stato dimostrato come sia necessario distinguere due tipi di sistemi, *non difettivi* e *difettivi*: alla prima categoria appartengono i sistemi per i quali a ogni autovalore di molteplicità r corrisponde un autospazio di dimensione r (è possibile fissare r autovettori linearmente indipendenti), i restanti sistemi appartengono alla seconda categoria. Fatta questa precisazione, i risultati mostrano, in forma rigorosa, che i primi sistemi, quelli non difettivi, ammettono uno schema perturbativo in cui le autosoluzioni sono sviluppate in serie di potenze intere del parametro di piccolezza (serie alla Taylor), mentre nei casi difettivi è necessario ricorrere alle potenze frazionarie del parametro di piccolezza (serie alla Puiseux) [3.20]. Come verrà discusso più avanti, i casi che seguono appartengono tutti alla categoria dei sistemi non difettivi.

In particolare, lo schema perturbativo utilizzato nella tesi è quello abituale dei sistemi ad autovalori distinti; per il caso di sistemi non difettivi ad autovalori prossimi o multipli, è ancora possibile utilizzare uno sviluppo in serie di potenze intere, ma è necessario ricorrere a schemi perturbativi differenti e più specifici, come quello presentato recentemente in [3.16].

Stabilito che una serie alla Taylor è ammissibile allo scopo, bisogna ora chiedersi se la serie è convergente oppure meno: sotto l'ipotesi che gli operatori siano sufficientemente regolari, ossia, e più propriamente, richiedendo che le funzioni da sviluppare siano *funzioni analitiche* [3.13], il teorema di Taylor garantisce la convergenza della serie in un intorno opportuno del punto iniziale. Detto che nel seguito queste ipotesi di regolarità saranno considerate sempre avallate, l'entità dell'intorno di convergenza richiede un'ulteriore precisazione. In genere si chiede che l'ampiezza massima dello scostamento dal punto rispetto a cui si effettua lo sviluppo sia compreso tra $(0, 1)$ o $\ll 1$; tale condizione, classica della teoria delle perturbazioni, implica che le potenze superiori tendono a scemare e quindi è possibile ignorare le potenze *sufficientemente* elevate. Tuttavia, bisogna effettuare una precisazione: l'analisi matematica stabilisce che all'interno del raggio di convergenza le somme parziali dei termini della serie di Taylor rappresentano *bene quanto si vuole* una funzione, ma non esiste a priori nessu-

na garanzia che il raggio di convergenza sia inferiore all'unità, bensì potrebbe essere minore o maggiore di 1 [3.20]. Pertanto, la richiesta di uno scostamento $\ll 1$ non può che essere vista come una condizione sufficiente, ma non necessaria; inoltre, anche rispettando tale condizione, bisogna fissare il numero dei termini della serie da considerare: solitamente, seppure la natura ricorsiva del metodo ben si presti a generare soluzioni approssimate di ordine più alto, gli approcci stocastici perturbativi della dinamica strutturale sono sviluppati fino ai termini del secondo ordine [3.12]. La stessa espansione è adottata nel seguito.

Per quanto si sia visto che la letteratura sul tema non è povera, nei capitoli successivi le equazioni di governo del problema diretto, ovvero le relazioni delle distribuzioni delle autosoluzioni in presenza di parametri incerti gaussiani e indipendenti, sono dimostrate in forma indipendente, sia per meglio descrivere le potenzialità e i limiti del metodo, sia per sopperire alla disuniformità delle soluzioni di letteratura, che spesso afferiscono a situazioni semplificate (alcuni autori considerano costante la matrice delle masse, altri considerano solo gli autovalori oppure usano una particolare normalizzazione degli autovettori, altri ancora non esplicitano la dipendenza delle statistiche dell'autosoluzione da quelle dei parametri).

3.3 Posizione del problema

Sia ε un parametro adimensionale e siano $\mathbf{M}(\varepsilon)$ e $\mathbf{K}(\varepsilon)$ le matrici di massa e rigidezza di un modello strutturale lineare discreto o discretizzato scevro di smorzamento. Le oscillazioni libere del sistema sono soluzione dell'equazione:

$$\mathbf{M}(\varepsilon)\ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{K}(\varepsilon)\mathbf{u}(t) = \mathbf{0} \quad (3.1)$$

con $\mathbf{u}(t)$ vettore colonna dello spostamento.

Nell'ambito dell'analisi modale, la soluzione delle equazioni del moto si ottiene proiettando $\mathbf{u}(t)$ lungo i modi di vibrare ϕ_i :

$$\mathbf{u}(t) = \sum_{i=1}^n \phi_i \underbrace{\rho_i \sin(\omega_i t + \theta_i)}_{q_i(t)} = \Phi \mathbf{q}(t) \quad (3.2)$$

con n il numero di gradi di libertà del sistema, $\mathbf{q}(t) = [q_1(t), \dots, q_n(t)]$ il vettore colonna delle coordinate modali e $\Phi = [\phi_1, \dots, \phi_n]$ la matrice modale.

Imponendo la (3.2) nella (3.1) si ottiene il seguente problema agli autovalori in forma non standard:

$$(\mathbf{K}(\varepsilon) - \lambda_i \mathbf{M}(\varepsilon))\phi_i = \mathbf{0} \quad \lambda_i = \omega_i^2 \quad i = 1, \dots, n \quad (3.3)$$

da cui l'equazione caratteristica:

$$\det(\mathbf{K}(\varepsilon) - \lambda_i \mathbf{M}(\varepsilon)) = 0 \quad i = 1, \dots, n \quad (3.4)$$

La soluzione della (3.4) fornisce gli autovalori, ovvero le frequenze angolari o pulsazioni $\omega_i = \sqrt{\lambda_i}$ (da cui anche le frequenze cicliche $f_i = \omega_i/(2\pi)$ e i periodi $T_i = 1/f_i = 2\pi/\omega_i$), e la soluzione della (3.3) gli autovettori, ovvero i modi di vibrare ϕ_i . Come appare evidente dalla (3.3), i modi vibrare sono definiti a meno di una costante, comunemente imposta adottando un certo criterio di scala.

Sostituendo la (3.2) nella (3.1) e premoltiplicando ambo i membri per Φ^T si ottiene:

$$\Phi^T \mathbf{M}(\varepsilon) \Phi \ddot{\mathbf{q}}(t) + \Phi^T \mathbf{K}(\varepsilon) \Phi \mathbf{q}(t) = \mathbf{0} \quad (3.5)$$

ove si dimostra che le matrici $\Phi^T \mathbf{M}(\varepsilon) \Phi$ e $\Phi^T \mathbf{K}(\varepsilon) \Phi$, dette rispettivamente matrici modali di massa e rigidezza, sono matrici diagonali. Pertanto, omettendo la dipendenza esplicita dal tempo t e dal parametro ε , la precedente si scrive pure:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & m_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & m_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \\ \vdots \\ \ddot{q}_n \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & k_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & k_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.6)$$

ovvero come n equazioni differenziali disaccoppiate del tipo:

$$m_i \ddot{q}_i + k_i q_i = 0 \quad i = 1, \dots, n \quad (3.7)$$

da cui, ricordando la (3.2):

$$\ddot{q}_i + \omega_i^2 q_i = 0 \quad \omega_i = \sqrt{\frac{k_i}{m_i}} \quad i = 1, \dots, n \quad (3.8)$$

Ricapitolando, la procedura appena esposta, quella classica dell'analisi modale, consiste nel valutare le autosoluzioni (λ_i, ϕ_i) , e quindi risolvere, per date condizioni iniziali, le equazioni del moto di n oscillatori elementari. Ha perciò interesse studiare la sensibilità delle autosoluzioni di un sistema, ovvero chiedersi come una modifica nelle proprietà di massa e/o rigidezza si ripercuote nella definizione del problema agli autovalori, il che giustifica l'inserimento di una dipendenza parametrica.

3.4 Approccio perturbativo

Se si ammette che la dipendenza delle matrici di massa e rigidezza dal parametro ε sia sufficientemente regolare, allora nell'intorno di una data configurazione $(\mathbf{M}_0, \mathbf{K}_0)$ in

$\varepsilon = 0$ (si ammette, senza perdere di generalità, che lo stato iniziale sia quello nullo), è possibile effettuare uno sviluppo in serie di ε :

$$\begin{cases} \mathbf{M}(\varepsilon) = \mathbf{M}_0 + \varepsilon \mathbf{M}_1 + \varepsilon^2 \mathbf{M}_2 + \dots \\ \mathbf{K}(\varepsilon) = \mathbf{K}_0 + \varepsilon \mathbf{K}_1 + \varepsilon^2 \mathbf{K}_2 + \dots \end{cases} \quad \|\varepsilon\| \ll 1 \quad (3.9)$$

con:

$$\begin{cases} \mathbf{M}_j = \left. \frac{d^j \mathbf{M}(\varepsilon)}{d\varepsilon^j} \right|_{\varepsilon=0} \frac{1}{j!} \\ \mathbf{K}_j = \left. \frac{d^j \mathbf{K}(\varepsilon)}{d\varepsilon^j} \right|_{\varepsilon=0} \frac{1}{j!} \end{cases} \quad j = 0, \dots, \infty \quad (3.10)$$

Il parametro ε assume, quindi, il ruolo di un parametro di piccolezza, ovvero di una misura adimensionale della perturbazione dalla configurazione data.

È noto dalla letteratura che i sistemi conservativi, quale quello in esame, sono sempre *non difettivi*, circostanza che garantisce (cfr. § 3.2) la possibilità di adottare uno schema perturbativo in cui le autosoluzioni sono sviluppate in serie di potenze intere del parametro di piccolezza. Pertanto, la soluzione del problema perturbato, in termini sia di autovalori¹ λ_i che di autovettori ϕ_i , si scrive:

$$\begin{cases} \lambda_i = \lambda_{0i} + \varepsilon \lambda_{1i} + \varepsilon^2 \lambda_{2i} + \dots \\ \phi_i = \phi_{0i} + \varepsilon \phi_{1i} + \varepsilon^2 \phi_{2i} + \dots \end{cases} \quad (3.11)$$

Utilizzando le relazioni (3.9) e (3.11), il problema agli autovalori (3.3) si scrive:

$$\begin{aligned} &[(\mathbf{K}_0 + \varepsilon \mathbf{K}_1 + \varepsilon^2 \mathbf{K}_2 + \dots) - (\lambda_{0i} + \varepsilon \lambda_{1i} + \varepsilon^2 \lambda_{2i} + \dots)] \\ &(\mathbf{M}_0 + \varepsilon \mathbf{M}_1 + \varepsilon^2 \mathbf{M}_2 + \dots)(\phi_{0i} + \varepsilon \phi_{1i} + \varepsilon^2 \phi_{2i} + \dots) = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (3.12)$$

¹Sull'utilizzo degli autovalori: nell'ambito dell'approccio perturbativo che si intende sviluppare le frequenze possono essere valutate come:

$$f_i = \frac{\sqrt{\lambda_i}}{2\pi} = \frac{\sqrt{\lambda_{0i} + \varepsilon \lambda_{1i} + \varepsilon^2 \lambda_{2i} + \dots}}{2\pi}$$

È però evidente che, assumendo le frequenze come grandezze primarie, il risultato sarebbe stato diverso:

$$f_i = f_{0i} + \varepsilon f_{1i} + \varepsilon^2 f_{2i} + \dots = \frac{\sqrt{\lambda_{0i}}}{2\pi} + \varepsilon \frac{\sqrt{\lambda_{1i}}}{2\pi} + \varepsilon^2 \frac{\sqrt{\lambda_{2i}}}{2\pi} + \dots$$

ma quest'ultima relazione non garantisce che l'autosoluzione, che per definizione è una serie di coppie di autovalori λ_i e autovettori ϕ_i , sia scalata propriamente con lo stesso ordine di perturbazione. Si avrebbero infatti autovalori scalati con ordine differente rispetto agli autovettori:

$$\lambda_i = (f_i 2\pi)^2 = ((f_{0i} + \varepsilon f_{1i} + \varepsilon^2 f_{2i} + \dots) 2\pi)^2$$

Dovendo questa relazione essere soddisfatta $\forall \varepsilon$, dal bilancio delle potenze si ottiene:

$$\begin{cases} \varepsilon^0 : (\mathbf{K}_0 - \lambda_{0i} \mathbf{M}_0) \phi_{0i} = \mathbf{0} \\ \varepsilon^1 : (\mathbf{K}_0 - \lambda_{0i} \mathbf{M}_0) \phi_{1i} = (\lambda_{0i} \mathbf{M}_1 + \lambda_{1i} \mathbf{M}_0 - \mathbf{K}_1) \phi_{0i} \\ \varepsilon^2 : (\mathbf{K}_0 - \lambda_{0i} \mathbf{M}_0) \phi_{2i} = (\lambda_{0i} \mathbf{M}_1 + \lambda_{1i} \mathbf{M}_0 - \mathbf{K}_1) \phi_{1i} + \\ \quad + (\lambda_{0i} \mathbf{M}_2 + \lambda_{1i} \mathbf{M}_1 + \lambda_{2i} \mathbf{M}_0 - \mathbf{K}_2) \phi_{0i} \\ \dots \end{cases} \quad (3.13)$$

dove il termine di ordine 0 conduce alla comunemente detta *equazione generatrice*, che fornisce la soluzione imperturbata $(\lambda_{0i}, \phi_{0i})$, mentre i termini di ordine superiore forniscono, per approssimazioni successive, il contributo legato alla perturbazione.

3.5 Considerazioni sull'errore

Troncando la procedura perturbativa descritta a un certo ordine di approssimazione è possibile ottenere una stima degli autovalori e degli autovettori. È quindi d'interesse chiedersi se è possibile conoscere a priori, oppure meno, la fattezze di questa stima, ovvero come l'errore commesso nel risolvere in forma approssimata il problema agli autovalori, si ripercuote sull'autosoluzione (anche perché il riconoscimento di un dato trend guiderebbe poi la formulazione del problema inverso, nel quale dal modello modale si tornerà a quello fisico).

Per rispondere alla domanda è sufficiente richiamare il *teorema di Bauer-Fike* [3.24], il quale stabilisce che posto il problema agli autovalori in forma standard:

$$\mathbf{A}\phi = \lambda\phi \quad (3.14)$$

tra la soluzione esatta, ossia la coppia (λ, ϕ) , e una sua approssimazione, detta $(\bar{\lambda}, \bar{\phi})$, sussiste la relazione:

$$\left| \frac{\bar{\lambda} - \lambda}{\lambda} \right| + \left| \frac{(\bar{\phi} - \phi)^\top (\bar{\phi} - \phi)}{\phi^\top \phi} \right| = \left| \frac{(\mathbf{A}(\bar{\phi} - \phi))^\top (\bar{\phi} - \phi)}{(\mathbf{A}\phi)^\top \phi} \right| \quad (3.15)$$

I due termini a primo membro dell'equazione (3.15) sono facilmente riconoscibili: essi rappresentano, nell'ordine, l'errore relativo (in valore assoluto) commesso sugli autovalori λ e sugli autovettori ϕ . Pertanto, il teorema stabilisce l'entità totale, la somma, dei due contributi d'errore, mentre, in generale, non è possibile fissare a priori quale dei due conti maggiormente, neanche utilizzando un opportuno scalamento di comodo dei modi.

Tale risultato, riportato relativamente al caso di problema agli autovalori in forma standard, può essere esteso facilmente al caso di problema agli autovalori generalizzato

(o in forma non standard):

$$\mathbf{K}\boldsymbol{\phi} = \lambda \mathbf{M}\boldsymbol{\phi} \quad (3.16)$$

che, supponendo la matrice $\mathbf{M}$ invertibile, è infatti formalmente identico al problema standard (da non preferire numericamente per via dell'inversa):

$$\mathbf{A}\boldsymbol{\phi} = \lambda \boldsymbol{\phi} \quad \mathbf{A} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} \quad (3.17)$$

3.6 Soluzione al primo ordine

L'ordine di approssimazione delle autosoluzioni (3.11) dipende dal numero di termini utilizzati negli sviluppi in serie. Una forma compatta e agevole della soluzione si ottiene arrestando la ricerca della soluzione ai termini del primo ordine:

$$\begin{cases} \lambda_i = \lambda_{0i} + \varepsilon \lambda_{1i} + o(\varepsilon) \\ \boldsymbol{\phi}_i = \boldsymbol{\phi}_{0i} + \varepsilon \boldsymbol{\phi}_{1i} + o(\varepsilon) \end{cases} \quad (3.18)$$

Il primo passo della procedura consiste nel risolvere l'equazione generatrice e quindi valutare la soluzione imperturbata $(\lambda_{0i}, \boldsymbol{\phi}_{0i})$. In seguito si proietta l'autovettore $\boldsymbol{\phi}_{1i}$ nella base $\boldsymbol{\phi}_{0i}$:

$$\boldsymbol{\phi}_{1i} = \sum_{j=1}^n \boldsymbol{\phi}_{0j} \alpha_{ij} \quad (3.19)$$

e si sostituisce la relazione ottenuta nella (3.13)₂:

$$(\mathbf{K}_0 - \lambda_{0i}\mathbf{M}_0) \sum_{j=1}^n \boldsymbol{\phi}_{0j} \alpha_{ij} = (\lambda_{0i}\mathbf{M}_1 + \lambda_{1i}\mathbf{M}_0 - \mathbf{K}_1)\boldsymbol{\phi}_{0i} \quad (3.20)$$

Per valutare il termine λ_{1i} si premoltiplicano ambo i membri della (3.20) per $\boldsymbol{\phi}_{0i}^\top$:

$$\boldsymbol{\phi}_{0i}^\top (\mathbf{K}_0 - \lambda_{0i}\mathbf{M}_0) \sum_{j=1}^n \boldsymbol{\phi}_{0j} \alpha_{ij} = \boldsymbol{\phi}_{0i}^\top (\lambda_{0i}\mathbf{M}_1 + \lambda_{1i}\mathbf{M}_0 - \mathbf{K}_1)\boldsymbol{\phi}_{0i} \quad (3.21)$$

da cui, facendo uso della proprietà di ortogonalità dei modi rispetto alle matrici di massa e rigidezza $\mathbf{M}_0$ e $\mathbf{K}_0$:

$$\boldsymbol{\phi}_{0i}^\top (\mathbf{K}_0 - \lambda_{0i}\mathbf{M}_0)\boldsymbol{\phi}_{0i} \alpha_{ii} = \boldsymbol{\phi}_{0i}^\top (\lambda_{0i}\mathbf{M}_1 + \lambda_{1i}\mathbf{M}_0 - \mathbf{K}_1)\boldsymbol{\phi}_{0i} \quad (3.22)$$

Il primo membro della precedente equazione è nullo, essendo soddisfatta l'equazione generatrice (3.13)₁; pertanto, la (3.22) si semplifica nella:

$$\boldsymbol{\phi}_{0i}^\top (\lambda_{0i}\mathbf{M}_1 + \lambda_{1i}\mathbf{M}_0 - \mathbf{K}_1)\boldsymbol{\phi}_{0i} = 0 \quad (3.23)$$

da cui:

$$\lambda_{1i} = \frac{\phi_{0i}^\top (\mathbf{K}_1 - \lambda_{0i} \mathbf{M}_1) \phi_{0i}}{\phi_{0i}^\top \mathbf{M}_0 \phi_{0i}} \quad (3.24)$$

Per valutare il termine ϕ_{1i} , si premoltiplicano ambo i membri della (3.20) per $\phi_{0k}^\top$ (con $k \neq i$):

$$\phi_{0k}^\top (\mathbf{K}_0 - \lambda_{0i} \mathbf{M}_0) \sum_{j=1}^n \phi_{0j} \alpha_{ij} = \phi_{0k}^\top (\lambda_{0i} \mathbf{M}_1 + \lambda_{1i} \mathbf{M}_0 - \mathbf{K}_1) \phi_{0i} \quad (3.25)$$

da cui, facendo nuovamente uso della proprietà di ortogonalità dei modi rispetto alle matrici di massa e rigidezza $\mathbf{M}_0$ e $\mathbf{K}_0$:

$$\phi_{0k}^\top (\mathbf{K}_0 - \lambda_{0i} \mathbf{M}_0) \phi_{0k} \alpha_{ik} = \phi_{0k}^\top (\lambda_{0i} \mathbf{M}_1 - \mathbf{K}_1) \phi_{0i} \quad (3.26)$$

Sfruttando la validità dell'equazione generatrice (3.13)₁, al termine $\mathbf{K}_0 \phi_{0k}$ si può sostituire la quantità $\lambda_{0k} \mathbf{M}_0 \phi_{0k}$, e quindi scrivere la precedente relazione (3.26) come:

$$\phi_{0k}^\top (\lambda_{0k} \mathbf{M}_0 - \lambda_{0i} \mathbf{M}_0) \phi_{0k} \alpha_{ik} = \phi_{0k}^\top (\lambda_{0i} \mathbf{M}_1 - \mathbf{K}_1) \phi_{0i} \quad (3.27)$$

da cui:

$$\alpha_{ik} = \frac{\phi_{0k}^\top (\mathbf{K}_1 - \lambda_{0i} \mathbf{M}_1) \phi_{0i}}{(\lambda_{0i} - \lambda_{0k}) \phi_{0k}^\top \mathbf{M}_0 \phi_{0k}} \quad (3.28)$$

e infine, effettuando, per comodità, un cambio di indice:

$$\alpha_{ij} = \frac{\phi_{0j}^\top (\mathbf{K}_1 - \lambda_{0i} \mathbf{M}_1) \phi_{0i}}{(\lambda_{0i} - \lambda_{0j}) \phi_{0j}^\top \mathbf{M}_0 \phi_{0j}} \quad (3.29)$$

Gli autovettori ϕ_{1i} si scrivono quindi:

$$\phi_{1i} = \alpha_{ii} \phi_{0i} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{\phi_{0j}^\top (\mathbf{K}_1 - \lambda_{0i} \mathbf{M}_1) \phi_{0i}}{(\lambda_{0i} - \lambda_{0j}) \phi_{0j}^\top \mathbf{M}_0 \phi_{0j}} \phi_{0j} \quad (3.30)$$

ove i termini α_{ii} restano indeterminati (cfr. equazione (3.22)), e giocano quindi il ruolo della generica costante moltiplicativa.

Sintetizzando, con un approccio perturbativo al primo ordine gli autovalori λ_i e gli autovettori ϕ_i si scrivono:

$$\begin{cases} \lambda_i = \lambda_{0i} + \varepsilon \lambda_{1i} & \lambda_{1i} = \frac{\phi_{0i}^\top (\mathbf{K}_1 - \lambda_{0i} \mathbf{M}_1) \phi_{0i}}{\phi_{0i}^\top \mathbf{M}_0 \phi_{0i}} \\ \phi_i = \phi_{0i} + \varepsilon \phi_{1i} & \phi_{1i} = \alpha_{ii} \phi_{0i} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{\phi_{0j}^\top (\mathbf{K}_1 - \lambda_{0i} \mathbf{M}_1) \phi_{0i}}{(\lambda_{0i} - \lambda_{0j}) \phi_{0j}^\top \mathbf{M}_0 \phi_{0j}} \phi_{0j} \end{cases} \quad (3.31)$$

con $\alpha_{ii} \in \mathbb{R}$. In altri termini, basta conoscere le coppie $(\lambda_{0i}, \phi_{0i})$ e $(\lambda_{1i}, \phi_{1i})$ per poter esplorare, con un onere computazionale molto ridotto, l'andamento dell'autosoluzione nell'intorno della data configurazione².

3.6.1 Generalizzazione al caso multi-parametrico

Nelle sezioni precedenti si è ammesso che la perturbazione sia descrivibile per tramite di un unico parametro di piccolezza, ovvero che il sistema sia, globalmente, del tipo mono-parametrico. Tuttavia, è possibile generalizzare l'approccio al caso multi-parametrico, per il quale le matrici di massa e rigidezza diventano $\mathbf{M}(\boldsymbol{\theta})$ e $\mathbf{K}(\boldsymbol{\theta})$, essendo $\boldsymbol{\theta}$ il vettore dei parametri, e le equazioni del moto (3.1) si scrivono:

$$\mathbf{M}(\boldsymbol{\theta})\ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{K}(\boldsymbol{\theta})\mathbf{u}(t) = \mathbf{0} \quad (3.32)$$

Un approccio agevole è quello di ricondurre il caso multi-parametrico al mono-parametrico, di immediata lettura dei risultati. All'uopo, è sufficiente sviluppare le matrici di massa e rigidezza in funzione di un unico parametro evolutivo ε , per tramite del vettore dei parametri $\boldsymbol{\theta}$. Formalmente questo equivale a stabilire un percorso $\boldsymbol{\theta}(\varepsilon)$, ovvero nell'esplorare l'andamento dell'autosoluzione lungo una curva parametrizzata in funzione di ε .

Con tale approccio, anche nel caso multi-parametrico è possibile valutare l'autosoluzione al primo ordine tramite la (3.31), a patto di esprimere le matrici $\mathbf{M}_0$ e $\mathbf{K}_0$, $\mathbf{M}_1$ e $\mathbf{K}_1$ come (cfr. equazione (3.10)):

$$\begin{cases} \mathbf{M}_0 = \mathbf{M}(\boldsymbol{\theta}(\varepsilon)) \Big|_{\varepsilon=0} & \mathbf{M}_1 = \sum_{k=1}^m \frac{\partial \mathbf{M}(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_k} \frac{d\theta_k(\varepsilon)}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} \\ \mathbf{K}_0 = \mathbf{K}(\boldsymbol{\theta}(\varepsilon)) \Big|_{\varepsilon=0} & \mathbf{K}_1 = \sum_{k=1}^m \frac{\partial \mathbf{K}(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_k} \frac{d\theta_k(\varepsilon)}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} \end{cases} \quad (3.33)$$

essendo m il numero dei parametri. Si evidenzia come, per l'ipotesi di approccio al primo ordine, i percorsi percorribili nello spazio m -dimensionale dei parametri $\boldsymbol{\theta}$ sono soltanto rette.

Le relazioni (3.33) hanno il pregio di essere compatte e permettono un'estensione immediata della (3.31) al caso multi-parametrico; tuttavia, non individuano l'effetto dei singoli parametri θ_k sull'autosoluzione. Per superare questa difficoltà, è sufficiente

²*Sulla densità spettrale:* appare evidente come la procedura sia destinata all'analisi perturbativa di sistemi ad autovalori distinti. Nel caso in cui λ_{0j} è prossimo o coincidente con λ_{0i} , infatti, l'autosoluzione tende a divergere ed è necessario implementare uno schema perturbativo differente (cfr. § 3.2).

inserire le (3.33) nelle (3.31) e riassorbire il parametro ε :

$$\begin{cases} \lambda_i = \lambda_{0i} + \sum_{k=1}^m \theta_k \lambda_{1ik} & \lambda_{1ik} = \frac{\phi_{0i}^\top (\mathbf{K}_{1k} - \lambda_{0i} \mathbf{M}_{1k}) \phi_{0i}}{\phi_{0i}^\top \mathbf{M}_0 \phi_{0i}} \\ \phi_i = \phi_{0i} + \sum_{k=1}^m \theta_k \phi_{1ik} & \phi_{1ik} = \alpha_{iik} \phi_{0i} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{\phi_{0j}^\top (\mathbf{K}_{1k} - \lambda_{0i} \mathbf{M}_{1k}) \phi_{0i}}{(\lambda_{0i} - \lambda_{0j}) \phi_{0j}^\top \mathbf{M}_0 \phi_{0j}} \phi_{0j} \end{cases} \quad (3.34)$$

con:

$$\begin{cases} \alpha_{iik} \in \mathbb{R} \\ \mathbf{M}_0 = \mathbf{M}(\theta) \Big|_{\theta=0} & \mathbf{M}_{1k} = \frac{\partial \mathbf{M}(\theta)}{\partial \theta_k} \Big|_{\theta=0} \\ \mathbf{K}_0 = \mathbf{K}(\theta) \Big|_{\theta=0} & \mathbf{K}_{1k} = \frac{\partial \mathbf{K}(\theta)}{\partial \theta_k} \Big|_{\theta=0} \end{cases} \quad (3.35)$$

avendo supposto, senza perdere di generalità, che nella configurazione imperturbata sia $\theta = \mathbf{0}$ (il vettore dei parametri continua, così, ad avere il significato di perturbazione dalla configurazione data).

A differenza delle (3.31) e (3.33), con le quali il dominio dei parametri era spazzato tramite percorsi parametrizzati in ε , le (3.34) e le (3.35) forniscono automaticamente la variabilità dell'autosoluzione all'interno del dominio dei parametri θ .

3.6.2 Medie stocastiche dell'autosoluzione

In precedenza si sono sfruttate le potenzialità del metodo perturbativo per analizzare la dipendenza dell'autosoluzione da un parametro di piccolezza ε . La soluzione, troncata al primo ordine, è stata poi estesa al caso multi-parametrico.

Partendo dal caso generale, quello multi-parametrico, il vettore dei parametri θ listerà, in generale, parametri di perturbazione sia deterministici sia aleatori; in questa sezione si vogliono, conseguentemente, studiare le medie stocastiche dell'autosoluzione. Si ammette che tutti i parametri θ_k siano indipendenti e abbiano distribuzione gaussiana $\mathcal{N}(\mu_{\theta_k}, \sigma_{\theta_k}^2)$ di media μ_{θ_k} e varianza $\sigma_{\theta_k}^2$. Ricordando che è sempre possibile trasformare variabili aleatorie non-gaussiane e dipendenti in variabili gaussiane normalizzate e indipendenti (ad esempio, utilizzando la trasformazione di Rosenblatt o quella di Nataf) e che le variabili deterministiche possono ottenersi come passaggio al limite annullando la varianza, l'approccio sviluppato può immaginarsi del tutto generale.

Per valutare le medie stocastiche dell'autosoluzione, è sufficiente evidenziare che l'ipotesi di approccio perturbativo arrestato al primo ordine impone una dipendenza lineare tra l'autosoluzione del problema perturbato e i parametri θ_k di piccolezza, e che, com'è noto dalla teoria della probabilità, se una variabile aleatoria è generata come

combinazione lineare di una o più variabili gaussiane, è anch'essa una variabile gaussiana (cfr. Appendice B). Si ha pertanto che le distribuzioni di autovalori e autovettori sono gaussiane con medie pari a:

$$\begin{cases} \mu_{\lambda_i} = \lambda_{0i} + \sum_{k=1}^m \mu_{\theta_k} \lambda_{1ik} \\ \mu_{\phi_i} = \phi_{0i} + \sum_{k=1}^m \mu_{\theta_k} \phi_{1ik} \end{cases} \quad (3.36)$$

e varianze pari a:

$$\begin{cases} \sigma_{\lambda_i}^2 = \sum_{k=1}^m \sigma_{\theta_k}^2 \lambda_{1ik}^2 \\ \sigma_{\phi_i}^2 = \sum_{k=1}^m \sigma_{\theta_k}^2 \phi_{1ik}^2 \end{cases} \quad (3.37)$$

ove $\circ$ indica la potenza alla Hadamard (*elementwise*).

In definitiva, le relazioni (3.36) e (3.37) stabiliscono come variano le medie stocastiche dell'autosoluzione al variare delle medie μ_{θ_k} e delle varianze $\sigma_{\theta_k}^2$ dei parametri; nel caso deterministico, le (3.37) sono identicamente nulle e sopravvivono solo le (3.36). Si sottolinea pure che le (3.36) e (3.37) sono valide in generale per qualsiasi set di parametri θ_k indipendenti, quindi l'ipotesi di distribuzione gaussiana dei parametri è, al primo ordine, utilizzata soltanto al fine di riconoscere a priori che anche l'autosoluzione ha distribuzione gaussiana.

Si valutano, per completezza, anche le covarianze dell'autosoluzione, cfr. Appendice B; seppure tali grandezze siano ininfluenti ai fini della formulazione inversa di seguito riportata, le dimostrazioni che seguono forniscono un'importante proprietà, cioè che all'indipendenza dei parametri d'ingresso non corrisponde un'indipendenza dell'autosoluzione. Indicando con $E[\cdot]$ l'operatore *media stocastica*, si ha:

$$\begin{aligned} E[\lambda_i \lambda_j] &= E \left[\left(\lambda_{0i} + \sum_{k=1}^m \theta_k \lambda_{1ik} \right) \left(\lambda_{0j} + \sum_{l=1}^m \theta_l \lambda_{1jl} \right) \right] = \\ &= \lambda_{0i} \lambda_{0j} + \lambda_{0i} \sum_{l=1}^m \lambda_{1jl} E[\theta_l] + \lambda_{0j} \sum_{k=1}^m \lambda_{1ik} E[\theta_k] + \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m \lambda_{1ik} \lambda_{1jl} E[\theta_k \theta_l] \end{aligned} \quad (3.38)$$

e inoltre:

$$\begin{aligned} E[\lambda_i] E[\lambda_j] &= E \left[\lambda_{0i} + \sum_{k=1}^m \theta_k \lambda_{1ik} \right] E \left[\lambda_{0j} + \sum_{l=1}^m \theta_l \lambda_{1jl} \right] = \lambda_{0i} \lambda_{0j} + \\ &+ \lambda_{0i} \sum_{l=1}^m \lambda_{1jl} E[\theta_l] + \lambda_{0j} \sum_{k=1}^m \lambda_{1ik} E[\theta_k] + \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m \lambda_{1ik} \lambda_{1jl} E[\theta_k] E[\theta_l] \end{aligned} \quad (3.39)$$

e siccome, per definizione, la covarianza tra due autovalori λ_i e λ_j è pari a:

$$\sigma_{\lambda_i \lambda_j} = \text{Cov}(\lambda_i \lambda_j) = E[\lambda_i \lambda_j] - E[\lambda_i] E[\lambda_j] \quad (3.40)$$

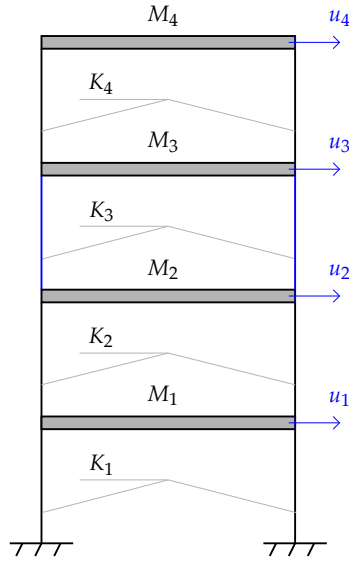


Figura 3.1: Sistema oggetto di studio.

si ottiene:

$$\sigma_{\lambda_i \lambda_j} = \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m \lambda_{1ik} \lambda_{1jl} (E[\theta_k \theta_l] - E[\theta_k] E[\theta_l]) = \sum_{k=1}^m \lambda_{1ik} \lambda_{1jk} \sigma_{\theta_k}^2 \quad (3.41)$$

avendo sfruttato l'ipotesi di indipendenza tra le variabili aleatorie.

Procedendo in maniera analoga, si dimostra che la matrice di covarianza tra due autovettori ϕ_i e ϕ_j è pari a:

$$\Sigma_{\phi_i \phi_j} = \sum_{k=1}^m \phi_{1ik} \phi_{1jk}^\top \sigma_{\theta_k}^2 \quad (3.42)$$

È immediato verificare, infine, come nel caso in cui $\lambda_i = \lambda_j$ la (3.41) conduca alla varianza dell'autovalore λ_i di cui alla (3.37)₁, e come, analogamente, nel caso in cui $\phi_i = \phi_j$ la diagonale della matrice di covarianza fornita nella (3.42) conduca alla varianza dell'autovettore ϕ_i di cui alla (3.37)₂.

3.6.3 Esempio

Si analizza il sistema piano di Figura 3.1.

Si tratta di un telaio *shear type* a 4 piani e, pertanto, a 4 gradi di libertà. Tale tipo di sistema vibrante³, sistema piano discreto conservativo e con disposizione in serie, rappresenta l'archetipo di riferimento della classe di sistemi non difettivi ad autovalori

³Scelta del numero di gradi di libertà e dei valori numerici del sistema: la scelta di un sistema a 4 gradi di libertà appare una valida soluzione di compromesso tra la volontà di mettere in luce gli sviluppi principali della tesi e la necessità di utilizzare un sistema semplice, a pochi gradi di libertà, facilmente interpretabile. Circa le

distinti analizzati nella tesi (escludendo casi *patologici*, infatti, un tale tipo di sistema è sempre caratterizzato da autovalori distinti). Le equazioni del moto (3.1) si scrivono (cfr. [3.7]):

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} M_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & M_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \\ \ddot{u}_3 \\ \ddot{u}_4 \end{Bmatrix} + \\ & + \begin{bmatrix} K_1 + K_2 & -K_2 & 0 & 0 \\ -K_2 & K_2 + K_3 & -K_3 & 0 \\ 0 & -K_3 & K_3 + K_4 & -K_4 \\ 0 & 0 & -K_4 & K_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (3.43)$$

Il sistema è caratterizzato dai seguenti valori di massa e rigidità:

$$\begin{cases} M_i = 1\text{kg} & i = 1, 2, 3, 4 \\ K_i = 1800\text{N/m} & i = 1, 2, 4 \\ K_3 = 1800(1 - \theta)\text{N/m} & \theta : p_\theta(\theta) = \mathcal{N}(\mu_\theta, \sigma_\theta^2) \end{cases} \quad (3.44)$$

con $p_\theta(\theta)$ funzione di densità di probabilità della variabile θ .

L'applicazione delle (3.35) fornisce immediatamente:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{M}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \mathbf{K}_0 = \begin{bmatrix} 3600 & -1800 & 0 & 0 \\ -1800 & 3600 & -1800 & 0 \\ 0 & -1800 & 3600 & -1800 \\ 0 & 0 & -1800 & 1800 \end{bmatrix} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{M}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{K}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1800 & 1800 & 0 \\ 0 & 1800 & -1800 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \right. \quad (3.45)$$

Per il problema imperturbato ($\mathbf{M}_0, \mathbf{K}_0$) si ottengono le autosoluzioni di Tabella 3.1: in alto si riportano gli autovalori λ_{0i} e i corrispondenti valori di frequenze angolari ω_{0i} , frequenze cicliche f_{0i} e periodi T_{0i} , mentre in basso si elencano (per colonne) le componenti degli autovettori ϕ_{0i} , ovvero i modi di vibrare, proposti anche in versione grafica in Figura 3.2. Come criterio di scala dei modi si è scelto di normalizzare rispetto alla componente massima.

masse e le rigidità del modello fisico, i valori sono stati calibrati in maniera tale che l'autosoluzione abbia valori congrui con un telaio in acciaio al vero e che, all'uopo, si possa realizzare facilmente un modello prototipo di laboratorio.

Modo	$\lambda_{0i}, (\text{rad/s})^2$	$\omega_{0i}, \text{rad/s}$	f_{0i}, Hz	T_{0i}, s
1	217.1	14.735	2.345	0.426
2	1800.0	42.426	6.752	0.148
3	4225.1	65.001	10.345	0.097
4	6357.8	79.736	12.690	0.079
DoF	ϕ_{01}	ϕ_{02}	ϕ_{03}	ϕ_{04}
1°	0.347	1.000	1.000	-0.653
2°	0.653	1.000	-0.347	1.000
3°	0.879	0.000	-0.879	-0.879
4°	1.000	-1.000	0.653	0.347

Tabella 3.1: Caratteristiche modali del sistema imperturbato.

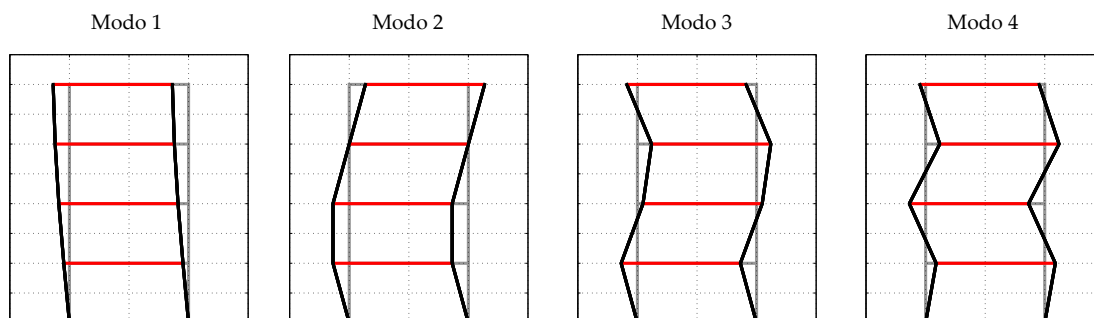


Figura 3.2: Modi di vibrare del sistema imperturbato.

I casi (perturbati) analizzati sono due:

- caso 1 - deterministico: $\mu_\theta \in (0, 0.5], \sigma_\theta^2 = 0$;
- caso 2 - aleatorio: $\mu_\theta \in (0, 0.5], \sigma_\theta^2 = (0.05 \mu_\theta)^2$;

ovvero si studia, con approccio deterministico prima, e stocastico poi, la sensibilità dell'autosoluzione nei confronti di un danneggiamento localizzato al terzo piano del telaio. Per entrambi i casi il valor medio del parametro è fatto crescere ampiamente, fino a 0.5, in modo da esplorare compiutamente l'intorno della configurazione data (riduzione del 50 % della rigidità del terzo piano); in merito alla varianza assunta nel caso aleatorio, è stato supposto un coefficiente di variazione costante del 5 %, sintomatico di una dispersione crescente al crescere del danno.

La soluzione ottenuta con l'approccio perturbativo (PA), ovvero tramite le relazioni (3.36) e (3.37), è confrontata con la soluzione del problema agli autovalori (3.32): per il caso deterministico sostituendo il valore corrente di μ_θ , ovvero valutando l'andamento dell'autosoluzione (ES) al variare del parametro; per il caso aleatorio eseguendo una simulazione Monte Carlo (MC) di 5000 campioni per ogni valore corrente di $(\mu_\theta, \sigma_\theta^2)$. In Figura 3.3, a titolo esplicativo, le distribuzioni teoriche delle densità di probabilità relative a 10 coppie $(\mu_\theta, \sigma_\theta^2)$ sono confrontate con gli istogrammi normalizzati forniti dalle corrispondenti simulazioni Monte Carlo (per fissare il numero di bin si è usato il metodo *square root*).

I risultati ottenuti in termini di autovalori e autovettori sono illustrati in Figura 3.4, per il caso 1, e in Figura 3.5, per il caso 2:

- caso 1 - deterministico: le curve continue e tratteggiate indicano rispettivamente la soluzione esatta del problema agli autovalori (ES) e la soluzione approssimata ottenuta con approccio perturbativo (PA);
- caso 2 - aleatorio: le curve continue e tratteggiate a tratto spesso indicano rispettivamente il valore medio fornito dalle simulazioni Monte Carlo del problema agli autovalori (MC) e quello approssimato ottenuto con approccio perturbativo (PA); le curve continue e tratteggiate a tratto sottile, riferite rispettivamente alle simulazioni Monte Carlo (MC) e all'approccio perturbativo (PA), tracciano poi l'intervallo di confidenza ottenuto sommando e sottraendo 3 deviazioni standard al precedente valore medio (com'è noto, nel caso di distribuzione normale tale intervallo assicura una probabilità del 99.7 %);

si precisa altresì che i grafici assumono la componente massima rispetto a cui i modi erano stati precedentemente scalati come componente di riferimento (unitaria per tutti i valori del parametro).

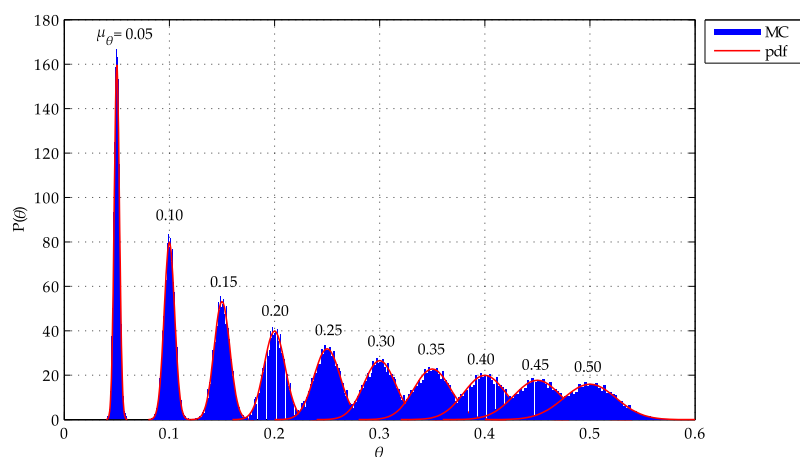


Figura 3.3: Distribuzione del parametro θ (caso 2).

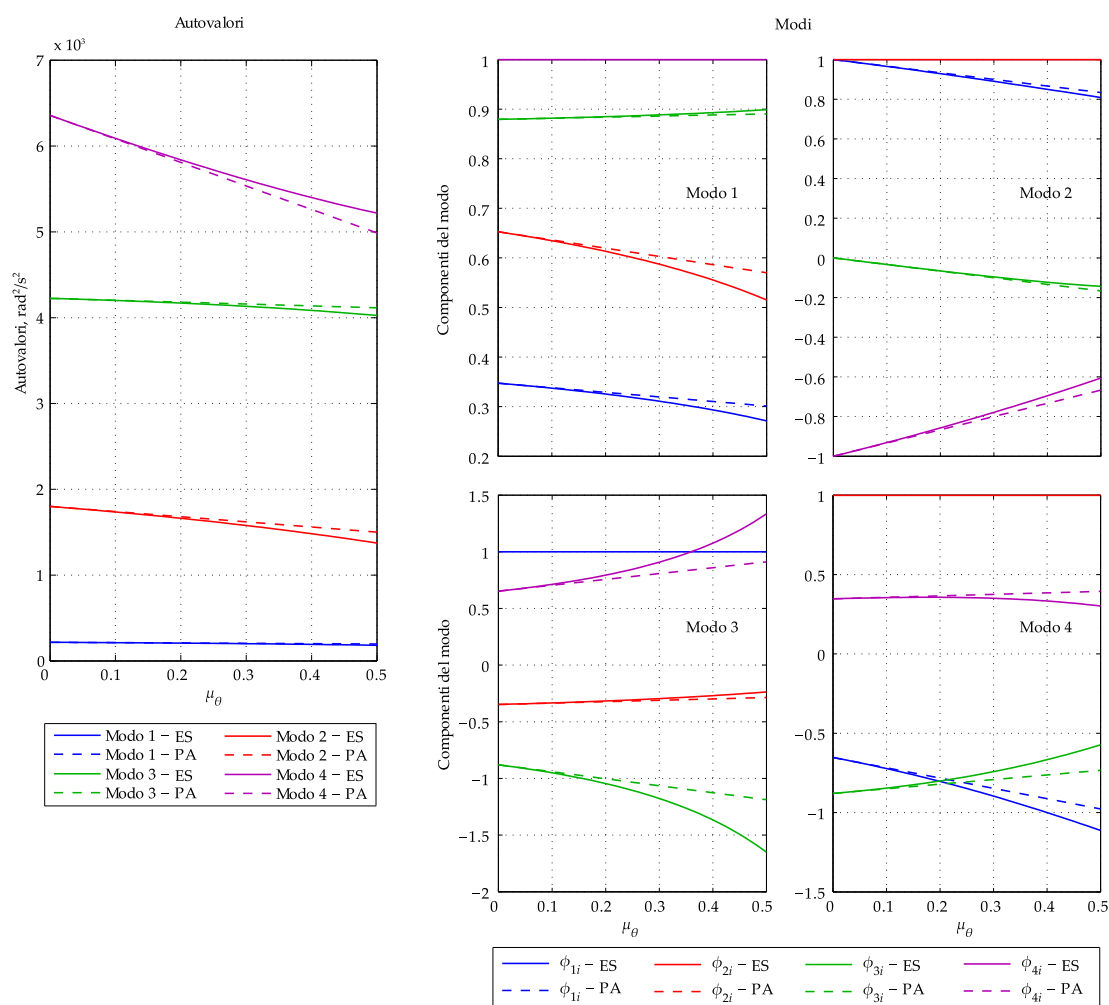


Figura 3.4: Andamento dell'autosoluzione al variare del parametro θ , caso 1.

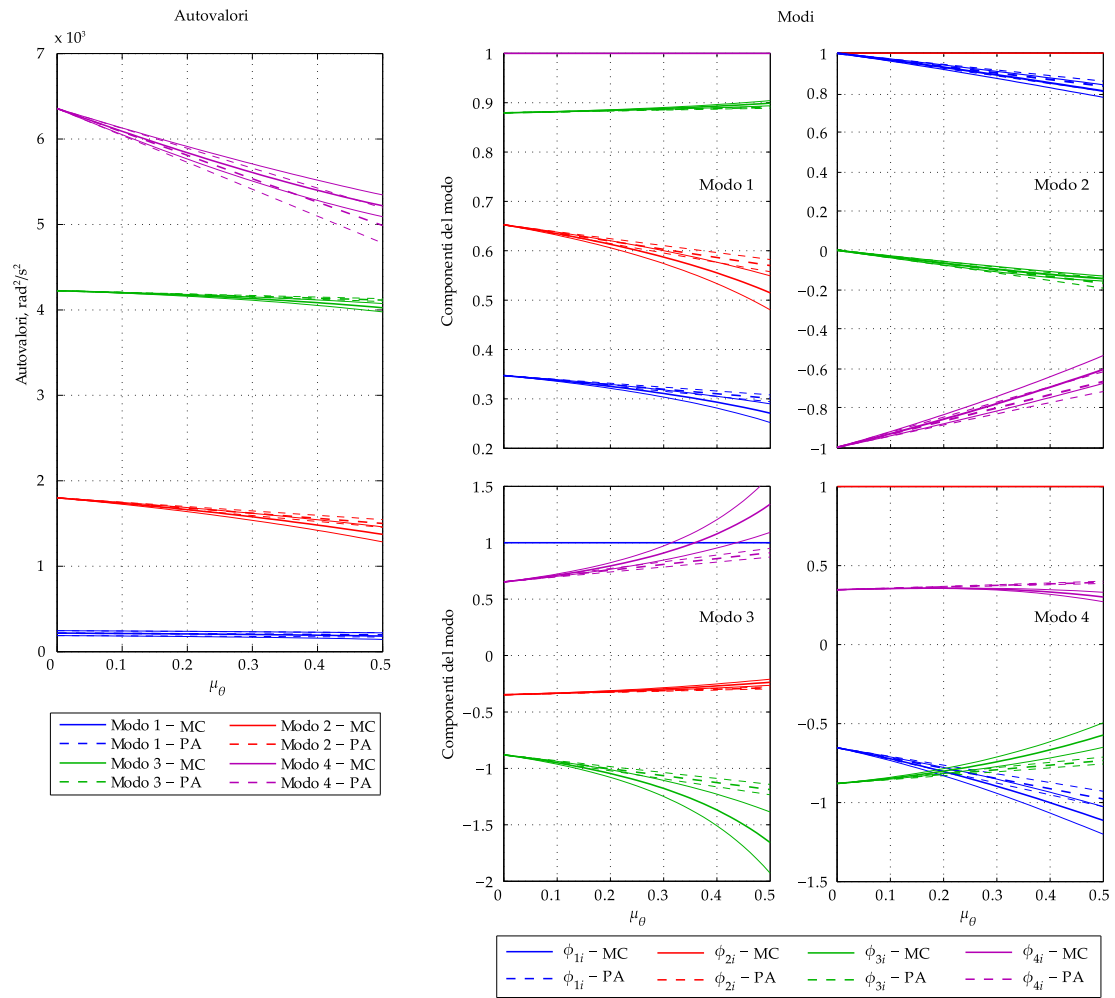


Figura 3.5: Andamento dell'autosoluzione al variare del parametro θ , caso 2.

In entrambi i casi, i risultati mostrano, com'era lecito attendersi, che l'errore commesso usando l'approccio perturbativo tende a crescere man mano che ci si allontana dalla soluzione imperturbata. Allo scopo di stimare quantitativamente la bontà delle soluzioni ottenute si effettuano i seguenti confronti:

- caso 1 - deterministico: confronto tra le medie fornite dalla soluzione esatta del problema agli autovalori (ES) e quelle approssimate ottenute con l'approccio perturbativo (PA);
- caso 1 - deterministico vs caso 2 - aleatorio: confronto tra le medie fornite dalla soluzione esatta del problema agli autovalori deterministico (ES) e quelle relative al problema aleatorio ottenute dalla simulazione Monte Carlo (MC);
- caso 2 - aleatorio: confronto tra le medie e le deviazioni standard fornite dalle simulazioni Monte Carlo (MC) con quelle ottenute con l'approccio perturbativo (PA). Per i valori del coefficiente di asimmetria o *Skewness* e del coefficiente di eccesso o *Kurtosis in eccesso* (cfr. Appendice B), identicamente nulli nel caso di approccio perturbativo (PA) al primo ordine (sia autovalori che autovettori risultano gaussiani, cfr. § 3.6.2), si veda quanto riportato per il caso di approccio perturbativo al secondo ordine;

naturalmente, i confronti relativi alle componenti dei modi sono da intendersi scevri della componente di riferimento.

I risultati⁴ ottenuti possono così sintetizzarsi:

- le curve continue, per il caso 1 (ES vs PA), e quelle tratteggiate, per il caso 2 (MC vs PA), di Figura 3.6 mostrano le differenze percentuali tra le medie. Gli andamenti confermano che l'errore commesso usando l'approccio perturbativo tende a crescere man mano che ci si allontana dalla soluzione imperturbata. L'errore massimo (in valore assoluto) è contenuto per gli autovalori (inferiore al 10 %), mentre è rilevante per le componenti dei modi (anche superiore al 30 %). La circostanza che le curve continue, relative al caso deterministico, e quelle tratteggiate, relative al caso aleatorio, siano indistinguibili è dovuta alla concomitanza di due effetti: in primis un'approccio perturbativo al primo ordine fornisce un'autosoluzione la cui media dipende solo dalle medie dei parametri, ma non dalle varianze degli stessi (cfr. equazione 3.36), i.e., caso 1 e caso 2 posseggono medie identiche; inoltre, le differenze percentuali tra le medie fornite dalla soluzione esatta del

⁴Differenze percentuali: le etichette *ES vs PA* (e analoghe) del report indicano per convenzione le differenze percentuali $(PA - ES)/ES$ (e similari).

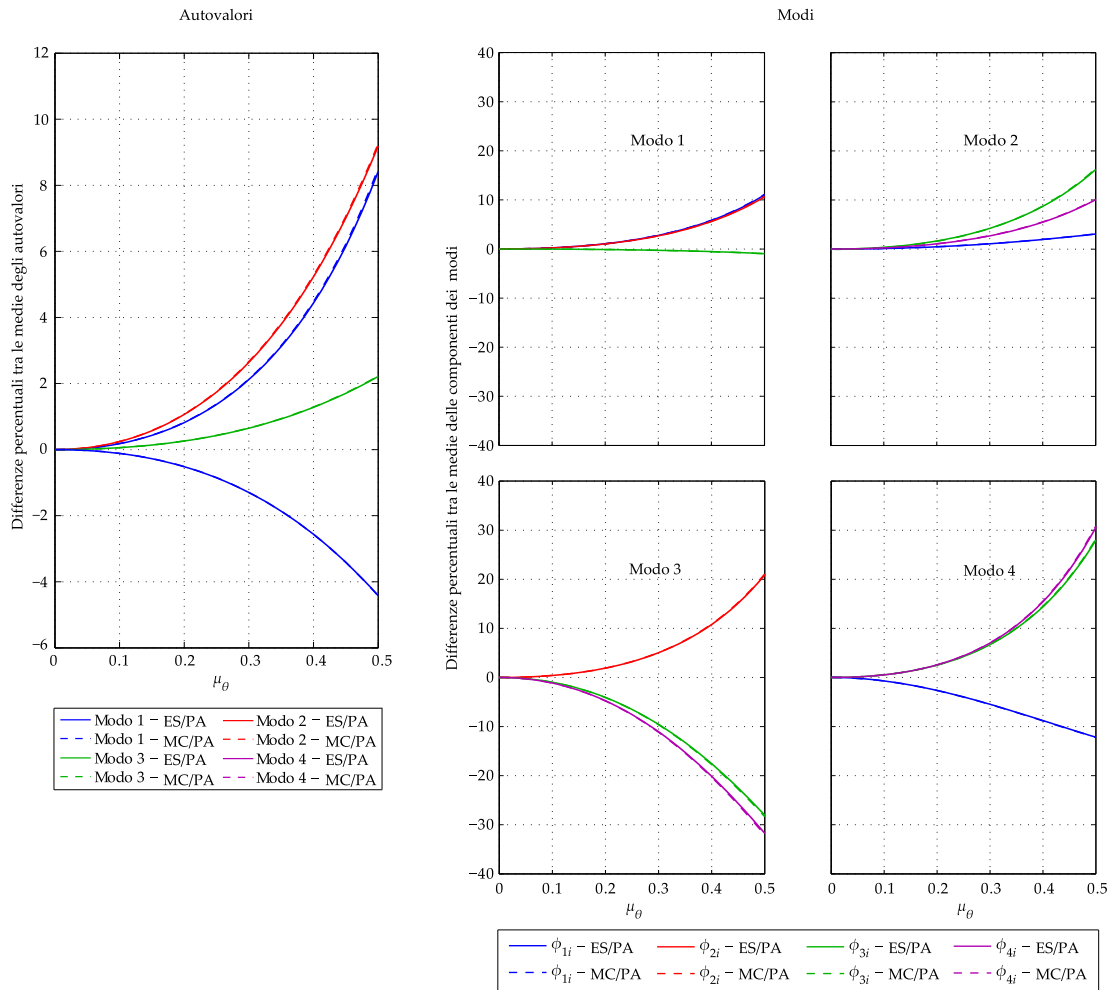


Figura 3.6: Differenze percentuali tra le medie, caso 1 (ES vs PA) e caso 2 (MC vs PA).

problema agli autovalori deterministico (ES) e quelle relative al problema aleatorio ottenute dalla simulazione Monte Carlo (MC) sono estremamente contenute (dell'ordine dello 0.1 % per gli autovalori e dello 0.5 % per le componenti dei modi, cfr. Figura 3.7);

- per il caso aleatorio, le differenze percentuali tra le deviazioni standard (MC vs PA) testimoniano, come già riscontrato per le medie, che l'approccio perturbativo fornisce risultati più attendibili per gli autovalori che per le componenti dei modi, cfr. Figura 3.8. Si rileva inoltre un particolare comportamento della quarta componente del quarto modo, che fa registrare un picco ben pronunciato in corrispondenza dell'inversione di ordine tra la prima e la terza componente dello stesso modo (cfr. Figura 3.5).

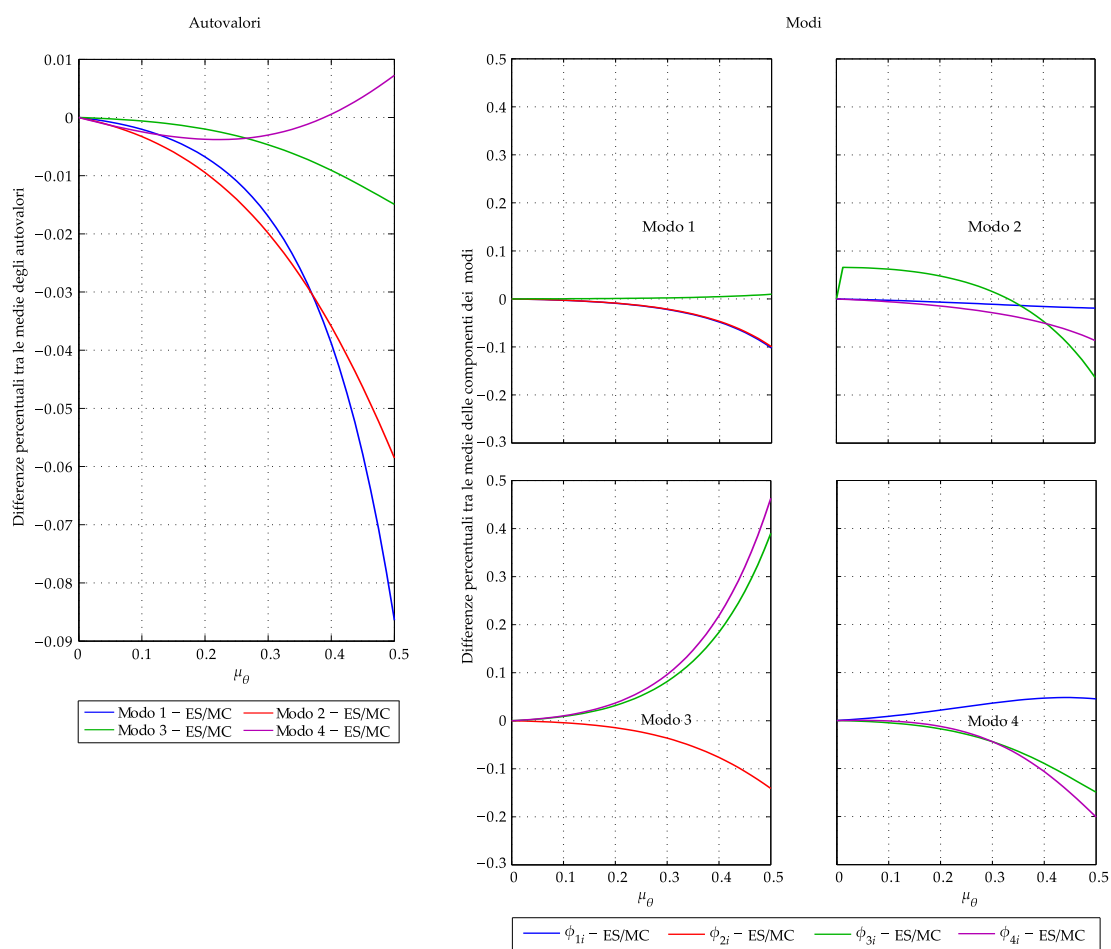


Figura 3.7: Differenze percentuali tra le medie (ES vs MC).

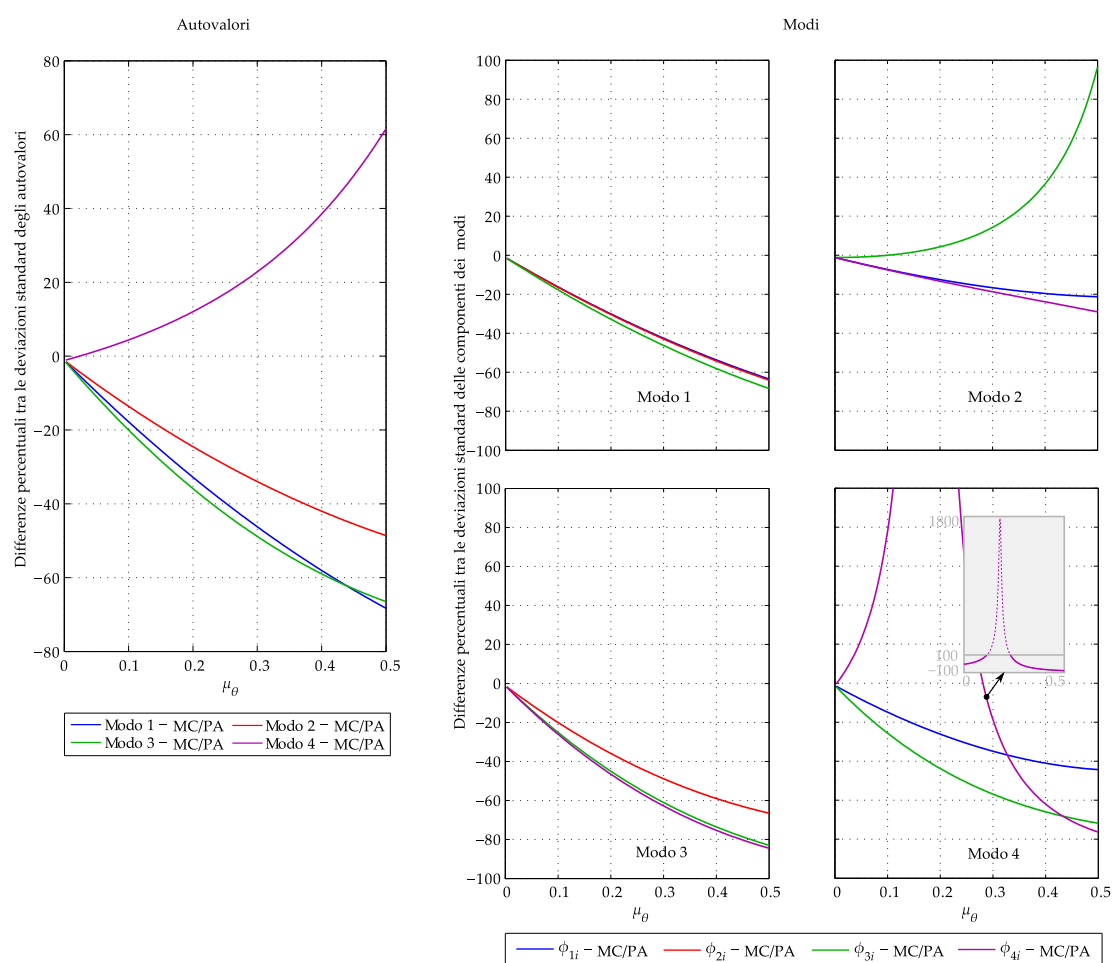


Figura 3.8: Differenze percentuali tra le deviazioni standard, caso 2 (MC vs PA).

3.7 Soluzione al secondo ordine

Operando in maniera analoga a quanto esposto precedentemente per i termini al primo ordine, si cerca l'approssimazione al secondo ordine delle autosoluzioni (3.11):

$$\begin{cases} \lambda_i = \lambda_{0i} + \varepsilon \lambda_{1i} + \varepsilon^2 \lambda_{2i} + o(\varepsilon^2) \\ \phi_i = \phi_{0i} + \varepsilon \phi_{1i} + \varepsilon^2 \phi_{2i} + o(\varepsilon^2) \end{cases} \quad (3.46)$$

I termini $(\lambda_{0i}, \phi_{0i})$, soluzione dell'equazione generatrice, sono da ritenersi noti, e così anche i termini $(\lambda_{1i}, \phi_{1i})$. Si proietta quindi l'autovettore ϕ_{2i} nella base ϕ_{0i} :

$$\phi_{2i} = \sum_{j=1}^n \phi_{0j} \beta_{ij} \quad (3.47)$$

e si sostituisce la relazione ottenuta nella (3.13)₃:

$$\begin{aligned} (\mathbf{K}_0 - \lambda_{0i} \mathbf{M}_0) \sum_{j=1}^n \phi_{0j} \beta_{ij} = \\ = (\lambda_{0i} \mathbf{M}_1 + \lambda_{1i} \mathbf{M}_0 - \mathbf{K}_1) \phi_{1i} + (\lambda_{0i} \mathbf{M}_2 + \lambda_{1i} \mathbf{M}_1 + \lambda_{2i} \mathbf{M}_0 - \mathbf{K}_2) \phi_{0i} \end{aligned} \quad (3.48)$$

Per valutare il termine λ_{2i} si premoltiplicano ambo i membri della (3.48) per $\phi_{0i}^\top$:

$$\begin{aligned} \phi_{0i}^\top (\mathbf{K}_0 - \lambda_{0i} \mathbf{M}_0) \sum_{j=1}^n \phi_{0j} \beta_{ij} = \\ = \phi_{0i}^\top (\lambda_{0i} \mathbf{M}_1 + \lambda_{1i} \mathbf{M}_0 - \mathbf{K}_1) \phi_{1i} + \phi_{0i}^\top (\lambda_{0i} \mathbf{M}_2 + \lambda_{1i} \mathbf{M}_1 + \lambda_{2i} \mathbf{M}_0 - \mathbf{K}_2) \phi_{0i} \end{aligned} \quad (3.49)$$

da cui, facendo uso della proprietà di ortogonalità dei modi rispetto alle matrici di massa e rigidezza $\mathbf{M}_0$ e $\mathbf{K}_0$:

$$\begin{aligned} \phi_{0i}^\top (\mathbf{K}_0 - \lambda_{0i} \mathbf{M}_0) \phi_{0i} \beta_{ii} = \\ = \phi_{0i}^\top (\lambda_{0i} \mathbf{M}_1 + \lambda_{1i} \mathbf{M}_0 - \mathbf{K}_1) \phi_{1i} + \phi_{0i}^\top (\lambda_{0i} \mathbf{M}_2 + \lambda_{1i} \mathbf{M}_1 + \lambda_{2i} \mathbf{M}_0 - \mathbf{K}_2) \phi_{0i} \end{aligned} \quad (3.50)$$

Il primo membro della precedente equazione è nullo, essendo soddisfatta l'equazione generatrice (3.13)₁; pertanto, la (3.50) si semplifica nella:

$$\phi_{0i}^\top (\lambda_{0i} \mathbf{M}_1 + \lambda_{1i} \mathbf{M}_0 - \mathbf{K}_1) \phi_{1i} + \phi_{0i}^\top (\lambda_{0i} \mathbf{M}_2 + \lambda_{1i} \mathbf{M}_1 + \lambda_{2i} \mathbf{M}_0 - \mathbf{K}_2) \phi_{0i} = 0 \quad (3.51)$$

da cui:

$$\lambda_{2i} = \frac{\phi_{0i}^\top (\mathbf{K}_1 - \lambda_{0i} \mathbf{M}_1 - \lambda_{1i} \mathbf{M}_0) \phi_{1i}}{\phi_{0i}^\top \mathbf{M}_0 \phi_{0i}} + \frac{\phi_{0i}^\top (\mathbf{K}_2 - \lambda_{0i} \mathbf{M}_2 - \lambda_{1i} \mathbf{M}_1) \phi_{0i}}{\phi_{0i}^\top \mathbf{M}_0 \phi_{0i}} \quad (3.52)$$

Per valutare il termine ϕ_{2i} , si premoltiplicano ambo i membri della (3.48) per $\phi_{0k}^\top$ (con $k \neq i$):

$$\begin{aligned} \phi_{0k}^\top (\mathbf{K}_0 - \lambda_{0i} \mathbf{M}_0) \sum_{j=1}^n \phi_{0j} \beta_{ij} = \\ = \phi_{0k}^\top (\lambda_{0i} \mathbf{M}_1 + \lambda_{1i} \mathbf{M}_0 - \mathbf{K}_1) \phi_{1i} + \phi_{0k}^\top (\lambda_{0i} \mathbf{M}_2 + \lambda_{1i} \mathbf{M}_1 + \lambda_{2i} \mathbf{M}_0 - \mathbf{K}_2) \phi_{0i} \end{aligned} \quad (3.53)$$

da cui, facendo nuovamente uso della proprietà di ortogonalità dei modi rispetto alle matrici di massa e rigidità $\mathbf{M}_0$ e $\mathbf{K}_0$:

$$\begin{aligned}\phi_{0k}^\top (\mathbf{K}_0 - \lambda_{0i} \mathbf{M}_0) \phi_{0k} \beta_{ik} &= \\ &= \phi_{0k}^\top (\lambda_{0i} \mathbf{M}_1 + \lambda_{1i} \mathbf{M}_0 - \mathbf{K}_1) \phi_{1i} + \phi_{0k}^\top (\lambda_{0i} \mathbf{M}_2 + \lambda_{1i} \mathbf{M}_1 - \mathbf{K}_2) \phi_{0i}\end{aligned}\quad (3.54)$$

Sfruttando la validità dell'equazione generatrice (3.13)₁, al termine $\mathbf{K}_0 \phi_{0k}$ si può sostituire la quantità $\lambda_{0k} \mathbf{M}_0 \phi_{0k}$, e quindi scrivere la precedente relazione (3.54) come:

$$\begin{aligned}\phi_{0k}^\top (\lambda_{0k} \mathbf{M}_0 - \lambda_{0i} \mathbf{M}_0) \phi_{0k} \beta_{ik} &= \\ &= \phi_{0k}^\top (\lambda_{0i} \mathbf{M}_1 + \lambda_{1i} \mathbf{M}_0 - \mathbf{K}_1) \phi_{1i} + \phi_{0k}^\top (\lambda_{0i} \mathbf{M}_2 + \lambda_{1i} \mathbf{M}_1 - \mathbf{K}_2) \phi_{0i}\end{aligned}\quad (3.55)$$

da cui:

$$\beta_{ik} = \frac{\phi_{0k}^\top (\mathbf{K}_1 - \lambda_{0i} \mathbf{M}_1 - \lambda_{1i} \mathbf{M}_0) \phi_{1i}}{(\lambda_{0i} - \lambda_{0k}) \phi_{0k}^\top \mathbf{M}_0 \phi_{0k}} + \frac{\phi_{0k}^\top (\mathbf{K}_2 - \lambda_{0i} \mathbf{M}_2 - \lambda_{1i} \mathbf{M}_1) \phi_{0i}}{(\lambda_{0i} - \lambda_{0k}) \phi_{0k}^\top \mathbf{M}_0 \phi_{0k}} \quad (3.56)$$

e infine, effettuando, per comodità, un cambio di indice:

$$\beta_{ij} = \frac{\phi_{0j}^\top (\mathbf{K}_1 - \lambda_{0i} \mathbf{M}_1 - \lambda_{1i} \mathbf{M}_0) \phi_{1i}}{(\lambda_{0i} - \lambda_{0j}) \phi_{0j}^\top \mathbf{M}_0 \phi_{0j}} + \frac{\phi_{0j}^\top (\mathbf{K}_2 - \lambda_{0i} \mathbf{M}_2 - \lambda_{1i} \mathbf{M}_1) \phi_{0i}}{(\lambda_{0i} - \lambda_{0j}) \phi_{0j}^\top \mathbf{M}_0 \phi_{0j}} \quad (3.57)$$

Gli autovettori ϕ_{2i} si scrivono quindi:

$$\begin{aligned}\phi_{2i} = \beta_{ii} \phi_{0i} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n &\left(\frac{\phi_{0j}^\top (\mathbf{K}_1 - \lambda_{0i} \mathbf{M}_1 - \lambda_{1i} \mathbf{M}_0) \phi_{1i}}{(\lambda_{0i} - \lambda_{0j}) \phi_{0j}^\top \mathbf{M}_0 \phi_{0j}} + \right. \\ &\left. + \frac{\phi_{0j}^\top (\mathbf{K}_2 - \lambda_{0i} \mathbf{M}_2 - \lambda_{1i} \mathbf{M}_1) \phi_{0i}}{(\lambda_{0i} - \lambda_{0j}) \phi_{0j}^\top \mathbf{M}_0 \phi_{0j}} \right) \phi_{0j}\end{aligned}\quad (3.58)$$

ove i termini β_{ii} restano indeterminati (cfr. equazione (3.50)), e giocano quindi il ruolo della generica costante moltiplicativa.

Sintetizzando, con un approccio perturbativo al secondo ordine gli autovalori λ_i e gli autovettori ϕ_i si scrivono:

$$\left\{ \begin{aligned} \lambda_i &= \lambda_{0i} + \varepsilon \lambda_{1i} + \varepsilon^2 \lambda_{2i} \\ \lambda_{2i} &= \frac{\phi_{0i}^\top (\mathbf{K}_1 - \lambda_{0i} \mathbf{M}_1 - \lambda_{1i} \mathbf{M}_0) \phi_{1i}}{\phi_{0i}^\top \mathbf{M}_0 \phi_{0i}} + \frac{\phi_{0i}^\top (\mathbf{K}_2 - \lambda_{0i} \mathbf{M}_2 - \lambda_{1i} \mathbf{M}_1) \phi_{0i}}{\phi_{0i}^\top \mathbf{M}_0 \phi_{0i}} \\ \phi_i &= \phi_{0i} + \varepsilon \phi_{1i} + \varepsilon^2 \phi_{2i} \\ \phi_{2i} &= \beta_{ii} \phi_{0i} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \left(\frac{\phi_{0j}^\top (\mathbf{K}_1 - \lambda_{0i} \mathbf{M}_1 - \lambda_{1i} \mathbf{M}_0) \phi_{1i}}{(\lambda_{0i} - \lambda_{0j}) \phi_{0j}^\top \mathbf{M}_0 \phi_{0j}} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\phi_{0j}^\top (\mathbf{K}_2 - \lambda_{0i} \mathbf{M}_2 - \lambda_{1i} \mathbf{M}_1) \phi_{0i}}{(\lambda_{0i} - \lambda_{0j}) \phi_{0j}^\top \mathbf{M}_0 \phi_{0j}} \right) \phi_{0j} \end{aligned} \right. \quad (3.59)$$

con $\beta_{ii} \in \mathbb{R}$. Le (3.59) arricchiscono⁵ con i termini quadratici la soluzione al primo ordine (3.31); computazionalmente questo richiede che, oltre alle coppie $(\lambda_{0i}, \phi_{0i})$ e $(\lambda_{1i}, \phi_{1i})$, si valutino anche le coppie $(\lambda_{2i}, \phi_{2i})$.

3.7.1 Generalizzazione al caso multi-parametrico

Nel caso multi-parametrico, per il quale le matrici di massa e rigidezza diventano $\mathbf{M}(\boldsymbol{\theta})$ e $\mathbf{K}(\boldsymbol{\theta})$, essendo $\boldsymbol{\theta}$ il vettore dei parametri, cfr. (3.32), una metodologia possibile è esplorare l'andamento dell'autosoluzione lungo una curva parametrizzata in funzione di ε , ovvero del tipo $\boldsymbol{\theta}(\varepsilon)$.

Con tale approccio, anche nel caso multi-parametrico è possibile valutare l'autosoluzione al secondo ordine tramite la (3.59), a patto di esprimere le matrici $\mathbf{M}_0$ e $\mathbf{K}_0$, $\mathbf{M}_1$ e $\mathbf{K}_1$, $\mathbf{M}_2$ e $\mathbf{K}_2$ come (cfr. equazione (3.10)):

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{M}_0 = \mathbf{M}(\boldsymbol{\theta}(\varepsilon)) \Big|_{\varepsilon=0} \quad \mathbf{M}_1 = \sum_{k=1}^m \frac{\partial \mathbf{M}(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_k} \frac{d\theta_k(\varepsilon)}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} \\ \mathbf{M}_2 = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m \frac{\partial^2 \mathbf{M}(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_k \partial \theta_l} \frac{d\theta_k(\varepsilon)}{d\varepsilon} \frac{d\theta_l(\varepsilon)}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} \\ \mathbf{K}_0 = \mathbf{K}(\boldsymbol{\theta}(\varepsilon)) \Big|_{\varepsilon=0} \quad \mathbf{K}_1 = \sum_{k=1}^m \frac{\partial \mathbf{K}(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_k} \frac{d\theta_k(\varepsilon)}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} \\ \mathbf{K}_2 = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m \frac{\partial^2 \mathbf{K}(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_k \partial \theta_l} \frac{d\theta_k(\varepsilon)}{d\varepsilon} \frac{d\theta_l(\varepsilon)}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} \end{array} \right. \quad (3.60)$$

essendo m il numero dei parametri. Si evidenzia come, per l'ipotesi di approccio al secondo ordine, i percorsi percorribili nello spazio m -dimensionale dei parametri $\boldsymbol{\theta}$ sono al più quadratici.

Le relazioni (3.60) hanno il pregio di essere compatte e permettono un'estensione immediata della (3.59) al caso multi-parametrico; tuttavia, non individuano l'effetto dei singoli parametri θ_k sull'autosoluzione. Per superare questa difficoltà, è sufficiente

⁵Sulla densità spettrale: anche al secondo ordine vale un commento analogo a quello riportato nella Nota 2 di pag. 63.

inserire le (3.60) nelle (3.59) e riassorbire il parametro ε :

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_i = \lambda_{0i} + \sum_{k=1}^m \theta_k \lambda_{1ik} + \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m \theta_k \theta_l \lambda_{2ikl} \\ \lambda_{2ikl} = \frac{\phi_{0i}^\top (\mathbf{K}_{1k} - \lambda_{0i} \mathbf{M}_{1k} - \lambda_{1ik} \mathbf{M}_0) \phi_{1il}}{\phi_{0i}^\top \mathbf{M}_0 \phi_{0i}} + \\ \quad + \frac{\phi_{0i}^\top (\mathbf{K}_{2kl} - \lambda_{0i} \mathbf{M}_{2kl} - \lambda_{1il} \mathbf{M}_{1k}) \phi_{0i}}{\phi_{0i}^\top \mathbf{M}_0 \phi_{0i}} \\ \phi_i = \phi_{0i} + \sum_{k=1}^m \theta_k \phi_{1ik} + \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m \theta_k \theta_l \phi_{2ikl} \\ \phi_{2ikl} = \beta_{iikl} \phi_{0i} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \left(\frac{\phi_{0j}^\top (\mathbf{K}_{1k} - \lambda_{0i} \mathbf{M}_{1k} - \lambda_{1ik} \mathbf{M}_0) \phi_{1il}}{(\lambda_{0i} - \lambda_{0j}) \phi_{0j}^\top \mathbf{M}_0 \phi_{0j}} + \right. \\ \quad \left. + \frac{\phi_{0j}^\top (\mathbf{K}_{2kl} - \lambda_{0i} \mathbf{M}_{2kl} - \lambda_{1il} \mathbf{M}_{1k}) \phi_{0i}}{(\lambda_{0i} - \lambda_{0j}) \phi_{0j}^\top \mathbf{M}_0 \phi_{0j}} \right) \phi_{0j} \end{array} \right. \quad (3.61)$$

con λ_{1ik} e ϕ_{1ik} (e analogamente λ_{1il} e ϕ_{1il}) forniti dalla (3.34) e con:

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta_{iikl} \in \mathbb{R} \\ \mathbf{M}_0 = \mathbf{M}(\theta) \Big|_{\theta=0} \quad \mathbf{M}_{1k} = \frac{\partial \mathbf{M}(\theta)}{\partial \theta_k} \Big|_{\theta=0} \quad \mathbf{M}_{2kl} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \mathbf{M}(\theta)}{\partial \theta_k \partial \theta_l} \Big|_{\theta=0} \\ \mathbf{K}_0 = \mathbf{K}(\theta) \Big|_{\theta=0} \quad \mathbf{K}_{1k} = \frac{\partial \mathbf{K}(\theta)}{\partial \theta_k} \Big|_{\theta=0} \quad \mathbf{K}_{2kl} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \mathbf{K}(\theta)}{\partial \theta_k \partial \theta_l} \Big|_{\theta=0} \end{array} \right. \quad (3.62)$$

avendo supposto, senza perdere di generalità, che nella configurazione imperturbata sia $\theta = \mathbf{0}$ (il vettore dei parametri continua, così, ad avere il significato di perturbazione dalla configurazione data).

A differenza delle (3.59) e (3.60), con le quali il dominio dei parametri era spazzato tramite percorsi parametrizzati in ε , le (3.61) e le (3.62) forniscono automaticamente la variabilità dell'autosoluzione all'interno del dominio dei parametri θ .

3.7.2 Medie stocastiche dell'autosoluzione

Si è studiata la dipendenza dell'autosoluzione da un parametro di piccozza ε tramite una soluzione approssimata perturbativa troncata al secondo ordine; il caso multi-parametrico è stato quindi ottenuto tramite un'immediata procedura di generalizzazione.

Come già fatto per la soluzione al primo ordine, si parte dal caso generale, quello multi-parametrico, e si studiano le medie stocastiche dell'autosoluzione, sotto l'ipotesi che tutti i parametri θ_k siano indipendenti e abbiano distribuzione gaussiana $\mathcal{N}(\mu_{\theta_k}, \sigma_{\theta_k}^2)$ di media μ_{θ_k} e varianza $\sigma_{\theta_k}^2$; per le implicazioni di tale ipotesi si veda quanto già

precisato al § 3.6.2. Differentemente dal caso al primo ordine, però, la dipendenza tra l'autosoluzione del problema perturbato e i parametri θ_k non è più lineare, il che implica che autovalori e autovettori avranno, in genere, una distribuzione di probabilità non gaussiana.

Con riferimento al generico autovalore λ_i la media è pari a:

$$\mu_{\lambda_i} = E[\lambda_i] = E\left[\lambda_{0i} + \sum_{k=1}^m \theta_k \lambda_{1ik} + \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m \theta_k \theta_l \lambda_{2ikl}\right] \quad (3.63)$$

da cui, sfruttando l'ipotesi di indipendenza tra i parametri:

$$\mu_{\lambda_i} = \lambda_{0i} + \sum_{k=1}^m \mu_{\theta_k} \lambda_{1ik} + \sum_{k=1}^m \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^m \mu_{\theta_k} \mu_{\theta_l} \lambda_{2ikl} + \sum_{k=1}^m (\mu_{\theta_k}^2 + \sigma_{\theta_k}^2) \lambda_{2ikk} \quad (3.64)$$

Procedendo allo stesso modo per gli autovettori, si ha che le distribuzioni dell'autosoluzione hanno medie pari a:

$$\begin{cases} \mu_{\lambda_i} = \lambda_{0i} + \sum_{k=1}^m \mu_{\theta_k} \lambda_{1ik} + \sum_{k=1}^m \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^m \mu_{\theta_k} \mu_{\theta_l} \lambda_{2ikl} + \sum_{k=1}^m (\mu_{\theta_k}^2 + \sigma_{\theta_k}^2) \lambda_{2ikk} \\ \mu_{\phi_i} = \phi_{0i} + \sum_{k=1}^m \mu_{\theta_k} \phi_{1ik} + \sum_{k=1}^m \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^m \mu_{\theta_k} \mu_{\theta_l} \phi_{2ikl} + \sum_{k=1}^m (\mu_{\theta_k}^2 + \sigma_{\theta_k}^2) \phi_{2ikk} \end{cases} \quad (3.65)$$

che banalmente forniscono le relazioni (3.36) annullando tutti i termini al secondo ordine.

Per la covarianza tra la generica coppia di autovalori λ_i e λ_j , si ha:

$$\begin{aligned} E[\lambda_i \lambda_j] &= E\left[\left(\lambda_{0i} + \sum_{k=1}^m \theta_k \lambda_{1ik} + \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m \theta_k \theta_l \lambda_{2ikl}\right) \right. \\ &\quad \left. \left(\lambda_{0j} + \sum_{p=1}^m \theta_p \lambda_{1jp} + \sum_{p=1}^m \sum_{q=1}^m \theta_p \theta_q \lambda_{2jpq}\right)\right] = \\ &= \lambda_{0i} \lambda_{0j} + \lambda_{0i} \sum_{p=1}^m \lambda_{1jp} E[\theta_p] + \lambda_{0i} \sum_{p=1}^m \sum_{q=1}^m \lambda_{2jpq} E[\theta_p \theta_q] + \\ &+ \lambda_{0j} \sum_{k=1}^m \lambda_{1ik} E[\theta_k] + \sum_{k=1}^m \sum_{p=1}^m \lambda_{1ik} \lambda_{1jp} E[\theta_k \theta_p] + \sum_{k=1}^m \sum_{p=1}^m \sum_{q=1}^m \lambda_{1ik} \lambda_{2jpq} E[\theta_k \theta_p \theta_q] + \\ &+ \lambda_{0j} \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m \lambda_{2ikl} E[\theta_k \theta_l] + \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m \sum_{p=1}^m \lambda_{1jp} \lambda_{2ikl} E[\theta_p \theta_k \theta_l] + \\ &\quad + \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m \sum_{p=1}^m \sum_{q=1}^m \lambda_{2ikl} \lambda_{2jpq} E[\theta_k \theta_l \theta_p \theta_q] \end{aligned} \quad (3.66)$$

e inoltre:

$$\begin{aligned}
E[\lambda_i]E[\lambda_j] &= E \left[\lambda_{0i} + \sum_{k=1}^m \theta_k \lambda_{1ik} + \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m \theta_k \theta_l \lambda_{2ikl} \right] \\
&\quad E \left[\lambda_{0j} + \sum_{p=1}^m \theta_p \lambda_{1jp} + \sum_{p=1}^m \sum_{q=1}^m \theta_p \theta_q \lambda_{2jpq} \right] = \\
&= \lambda_{0i} \lambda_{0j} + \lambda_{0i} \sum_{p=1}^m \lambda_{1jp} E[\theta_p] + \lambda_{0i} \sum_{p=1}^m \sum_{q=1}^m \lambda_{2jpq} E[\theta_p \theta_q] + \\
&+ \lambda_{0j} \sum_{k=1}^m \lambda_{1ik} E[\theta_k] + \sum_{k=1}^m \sum_{p=1}^m \lambda_{1ik} \lambda_{1jp} E[\theta_k] E[\theta_p] + \\
&\quad + \sum_{k=1}^m \sum_{p=1}^m \sum_{q=1}^m \lambda_{1ik} \lambda_{2jpq} E[\theta_k] E[\theta_p \theta_q] + \\
&+ \lambda_{0j} \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m \lambda_{2ikl} E[\theta_k \theta_l] + \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m \sum_{p=1}^m \lambda_{1jp} \lambda_{2ikl} E[\theta_p] E[\theta_k \theta_l] + \\
&\quad + \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m \sum_{p=1}^m \sum_{q=1}^m \lambda_{2ikl} \lambda_{2jpq} E[\theta_k \theta_l] E[\theta_p \theta_q]
\end{aligned} \tag{3.67}$$

Per definizione, la covarianza tra due autovalori λ_i e λ_j è pari a:

$$\sigma_{\lambda_i \lambda_j} = \text{Cov}(\lambda_i \lambda_j) = E[\lambda_i \lambda_j] - E[\lambda_i]E[\lambda_j] \tag{3.68}$$

da cui, sostituendo le relazioni precedenti e semplificando, si ottiene:

$$\begin{aligned}
\sigma_{\lambda_i \lambda_j} &= \sum_{k=1}^m \sum_{p=1}^m \lambda_{1ik} \lambda_{1jp} (E[\theta_k \theta_p] - E[\theta_k]E[\theta_p]) + \\
&+ \sum_{k=1}^m \sum_{p=1}^m \sum_{q=1}^m \lambda_{1ik} \lambda_{2jpq} (E[\theta_k \theta_p \theta_q] - E[\theta_k]E[\theta_p \theta_q]) + \\
&\quad + \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m \sum_{p=1}^m \lambda_{1jp} \lambda_{2ikl} (E[\theta_p \theta_k \theta_l] - E[\theta_p]E[\theta_k \theta_l]) + \\
&\quad + \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m \sum_{p=1}^m \sum_{q=1}^m \lambda_{2ikl} \lambda_{2jpq} (E[\theta_k \theta_l \theta_p \theta_q] - E[\theta_k \theta_l]E[\theta_p \theta_q])
\end{aligned} \tag{3.69}$$

Quest'ultima relazione può ulteriormente semplificarsi ricordando che se $x_1, x_2, \dots, x_s$ sono un set di variabili aleatorie indipendenti, allora:

$$E[x_1 x_2 \dots x_s] = E[x_1]E[x_2] \dots E[x_s] \tag{3.70}$$

e considerando anche che nel caso di variabili gaussiane valgono le relazioni (dimostrabili per ispezione diretta):

$$\begin{aligned}
 E[\theta_k \theta_p] - E[\theta_k]E[\theta_p] &= \begin{cases} 0 & \text{se } k \neq p \\ \sigma_{\theta_k}^2 & \text{se } k = p \end{cases} \\
 E[\theta_k \theta_p \theta_q] - E[\theta_k]E[\theta_p \theta_q] &= \begin{cases} 0 & \text{se } k \neq p \neq q \\ 0 & \text{se } k \neq p = q \\ \mu_{\theta_q} \sigma_{\theta_k}^2 & \text{se } k = p \neq q \\ \mu_{\theta_p} \sigma_{\theta_k}^2 & \text{se } k = q \neq p \\ 2\mu_{\theta_k} \sigma_{\theta_k}^2 & \text{se } k = p = q \end{cases} \\
 E[\theta_p \theta_k \theta_l] - E[\theta_p]E[\theta_k \theta_l] &= \begin{cases} 0 & \text{se } p \neq k \neq l \\ 0 & \text{se } p \neq k = l \\ \mu_{\theta_l} \sigma_{\theta_p}^2 & \text{se } p = k \neq l \\ \mu_{\theta_k} \sigma_{\theta_p}^2 & \text{se } p = l \neq k \\ 2\mu_{\theta_p} \sigma_{\theta_p}^2 & \text{se } p = k = l \end{cases} \quad (3.71) \\
 E[\theta_k \theta_l \theta_p \theta_q] - E[\theta_k \theta_l]E[\theta_p \theta_q] &= \begin{cases} 0 & \text{se } k \neq l \neq p \neq q \\ 0 & \text{se } k \neq l \neq p = q \\ \mu_{\theta_k} \mu_{\theta_q} \sigma_{\theta_l}^2 & \text{se } k \neq q \neq l = p \\ 0 & \text{se } k = l \neq p \neq q \\ \mu_{\theta_l} \mu_{\theta_q} \sigma_{\theta_k}^2 & \text{se } k = p \neq l \neq q \\ \mu_{\theta_l} \mu_{\theta_p} \sigma_{\theta_k}^2 & \text{se } k = q \neq p \neq l \\ \mu_{\theta_k} \mu_{\theta_p} \sigma_{\theta_l}^2 & \text{se } l = q \neq k \neq p \\ 2\mu_{\theta_k} \mu_{\theta_l} \sigma_{\theta_l}^2 & \text{se } k \neq l = p = q \\ 2\mu_{\theta_k} \mu_{\theta_q} \sigma_{\theta_k}^2 & \text{se } k = l = p \neq q \\ 2\mu_{\theta_k} \mu_{\theta_p} \sigma_{\theta_k}^2 & \text{se } k = l = q \neq p \\ 2\mu_{\theta_k} \mu_{\theta_l} \sigma_{\theta_k}^2 & \text{se } k = p = q \neq l \\ 4\mu_{\theta_k}^2 \sigma_{\theta_k}^2 + 2\sigma_{\theta_k}^4 & \text{se } k = l = p = q \end{cases}
 \end{aligned}$$

Sfruttando queste proprietà, alcune operazioni algebriche (semplici ma laboriose)

semplificano la precedente relazione (3.69) nella:

$$\begin{aligned} \sigma_{\lambda_i \lambda_j} = & \sum_{k=1}^m \sigma_{\theta_k}^2 \lambda_{1ik} \lambda_{1jk} + 2\sigma_{\theta_k}^4 \lambda_{2ikk} \lambda_{2jkk} + \\ & + \sum_{k=1}^m \sum_{p=1}^m \mu_{\theta_p} \sigma_{\theta_k}^2 (\lambda_{1ik} \lambda_{2jpk} + \lambda_{1ik} \lambda_{2jkp} + \lambda_{1jk} \lambda_{2ipk} + \lambda_{1jk} \lambda_{2ikp}) + \\ & + \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m \sum_{q=1}^m \mu_{\theta_k} \mu_{\theta_q} \sigma_{\theta_l}^2 (\lambda_{2ikl} \lambda_{2jlq} + \lambda_{2ilk} \lambda_{2jlk} + \lambda_{2ilk} \lambda_{2jql} + \lambda_{2ikl} \lambda_{2jql}) \end{aligned} \quad (3.72)$$

Alla stessa stregua, si dimostra pure che la matrice di covarianza tra due autovettori ϕ_i e ϕ_j è pari a:

$$\begin{aligned} \Sigma_{\phi_i \phi_j} = & \sum_{k=1}^m \sigma_{\theta_k}^2 \phi_{1ik} \phi_{1jk}^\top + 2\sigma_{\theta_k}^4 \phi_{2ikk} \phi_{2jkk}^\top + \\ & + \sum_{k=1}^m \sum_{p=1}^m \mu_{\theta_p} \sigma_{\theta_k}^2 (\phi_{1ik} \phi_{2jpk}^\top + \phi_{1ik} \phi_{2jkp}^\top + \phi_{1jk} \phi_{2ipk}^\top + \phi_{1jk} \phi_{2ikp}^\top) + \\ & + \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m \sum_{q=1}^m \mu_{\theta_k} \mu_{\theta_q} \sigma_{\theta_l}^2 (\phi_{2ikl} \phi_{2jlq}^\top + \phi_{2ilk} \phi_{2jlk}^\top + \phi_{2ilk} \phi_{2jql}^\top + \phi_{2ikl} \phi_{2jql}^\top) \end{aligned} \quad (3.73)$$

Le varianze dell'autosoluzione si ottengono ponendo $i = j$ nella (3.72), per le varianze degli autovalori λ_i , e selezionando la diagonale della matrice di covarianza fornita dalla (3.73) con $i = j$, per le varianze degli autovettori ϕ_i :

$$\left\{ \begin{aligned} \sigma_{\lambda_i}^2 = & \sum_{k=1}^m \sigma_{\theta_k}^2 \lambda_{1ik}^2 + 2\sigma_{\theta_k}^4 \lambda_{2ikk}^2 + \sum_{k=1}^m \sum_{p=1}^m 2\mu_{\theta_p} \sigma_{\theta_k}^2 (\lambda_{1ik} \lambda_{2ipk} + \lambda_{1ik} \lambda_{2ikp}) + \\ & + \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m \sum_{q=1}^m \mu_{\theta_k} \mu_{\theta_q} \sigma_{\theta_l}^2 (\lambda_{2ikl} \lambda_{2ilq} + \lambda_{2ilk} \lambda_{2ilq} + \lambda_{2ilk} \lambda_{2iql} + \lambda_{2ikl} \lambda_{2iql}) \\ \sigma_{\phi_i}^2 = & \sum_{k=1}^m \sigma_{\theta_k}^2 \phi_{1ik}^2 + 2\sigma_{\theta_k}^4 \phi_{2ikk}^2 + \sum_{k=1}^m \sum_{p=1}^m 2\mu_{\theta_p} \sigma_{\theta_k}^2 (\phi_{1ik} \phi_{2ipk} + \phi_{1ik} \phi_{2ikp}) + \\ & + \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m \sum_{q=1}^m \mu_{\theta_k} \mu_{\theta_q} \sigma_{\theta_l}^2 (\phi_{2ikl} \phi_{2ilq} + \phi_{2ilk} \phi_{2ilq} + \phi_{2ilk} \phi_{2iql} + \phi_{2ikl} \phi_{2iql}) \end{aligned} \right. \quad (3.74)$$

ove $\diamond$ e $\diamond$ indicano la potenza e il prodotto alla Hadamard, rispettivamente.

In definitiva, le relazioni (3.65) e (3.74) stabiliscono come variano le medie stocastiche dell'autosoluzione al variare delle medie μ_{θ_k} e delle varianze $\sigma_{\theta_k}^2$ dei parametri; nel caso deterministico, le (3.74) sono identicamente nulle e sopravvivono solo le (3.65).

È immediato verificare che annullando i termini quadratici (quelli etichettati con il pedice 2) si ottengono subitamente le medie stocastiche al primo ordine (cfr. § 3.6.2), e nello specifico: le (3.65) forniscono le medie (3.36), le (3.74) forniscono le varianze (3.37),

e la (3.72) e la (3.73) forniscono le relazioni delle covarianze (3.41) e (3.42), rispettivamente. Si sottolinea pure che, differentemente da quanto riscontrato con l'approccio al primo ordine, per il quale l'ipotesi di distribuzione gaussiana dei parametri veniva utilizzata soltanto al fine di riconoscere a priori la natura gaussiana anche dell'autosoluzione, nel caso al secondo ordine tale ipotesi è stata ampiamente utilizzata nel ricavare le varianze e covarianze di autovalori e autovettori.

3.7.3 Interpretazione delle medie stocastiche dell'autosoluzione

Per interpretare meglio le relazioni trovate nel paragrafo precedente, è conveniente riscrivere le equazioni che forniscono le medie stocastiche dell'autosoluzione con riferimento al caso mono-parametrico. All'uopo, è sufficiente imporre $m = 1$ nelle (3.65), per le medie, e nelle (3.72) e (3.73), per le covarianze (da cui anche le varianze), ottenendo:

$$\begin{cases} \mu_{\lambda_i} = \lambda_{0i} + \mu_{\theta}\lambda_{1i} + (\mu_{\theta}^2 + \sigma_{\theta}^2)\lambda_{2i} \\ \sigma_{\lambda_i\lambda_j} = \sigma_{\theta}^2\lambda_{1i}\lambda_{1j} + 2\mu_{\theta}\sigma_{\theta}^2(\lambda_{1i}\lambda_{2j} + \lambda_{1j}\lambda_{2i}) + (2\sigma_{\theta}^4 + 4\mu_{\theta}^2\sigma_{\theta}^2)\lambda_{2i}\lambda_{2j} \\ \mu_{\phi_i} = \phi_{0i} + \mu_{\theta}\phi_{1i} + (\mu_{\theta}^2 + \sigma_{\theta}^2)\phi_{2i} \\ \Sigma_{\phi_i\phi_j} = \sigma_{\theta}^2\phi_{1i}\phi_{1j}^{\top} + 2\mu_{\theta}\sigma_{\theta}^2(\phi_{1i}\phi_{2j}^{\top} + \phi_{1j}\phi_{2i}^{\top}) + (2\sigma_{\theta}^4 + 4\mu_{\theta}^2\sigma_{\theta}^2)\phi_{2i}\phi_{2j}^{\top} \end{cases} \quad (3.75)$$

relazioni in cui è immediato verificare come ponendo $\sigma_{\theta} = 0$ si ottiene il caso deterministico (varianze e covarianze dell'autosoluzione identicamente nulle). Nelle (3.75) è anche più evidente il contributo dei termini del secondo ordine; in particolare, si apprezza come il valore atteso dell'autosoluzione dipenda al secondo ordine anche dalla varianza σ_{θ}^2 del parametro, vale a dire, che le medie di autovalori e autovettori vengono traslate rispetto al valore corrispondente alla media del parametro.

Come si è già detto nel paragrafo precedente, inoltre, la distribuzione dell'autosoluzione si mantiene gaussiana soltanto arrestando l'approccio perturbativo al primo ordine, mentre al secondo, le (3.75) forniscono le prime due medie stocastiche di una soluzione la cui distribuzione resta incognita. Tuttavia, è possibile stimare di quanto queste distribuzioni si discostino dal caso gaussiano valutando il coefficiente di asimmetria o *Skewness* e il coefficiente di eccesso o *Kurtosis in eccesso* (ovvero, i momenti centrali normalizzati del terzo e quarto ordine, cfr. Appendice B). Per semplicità e nello spirito del presente paragrafo, il calcolo è eseguito con riferimento al caso mono-parametrico; tuttavia, si è visto che formalmente il caso multi-parametrico può essere ricondotto a quello mono-parametrico stabilendo dei percorsi $\theta(\epsilon)$, ovvero esplorando l'andamento dell'autosoluzione nello spazio dei parametri θ tramite curve parametrizzate in funzione di ϵ (rette per il caso al primo ordine, parabole per il caso al secondo ordine).

Con riferimento al generico autovalore λ_i , il coefficiente di asimmetria si scrive:

$$\gamma_{a\lambda_i} = \frac{\mathfrak{M}_{3\lambda_i}}{\sigma_{\lambda_i}^3} = \frac{E \left[\left((\lambda_{0i} + \theta\lambda_{1i} + \theta^2\lambda_{2i}) - (\lambda_{0i} + \mu_\theta\lambda_{1i} + (\mu_\theta^2 + \sigma_\theta^2)\lambda_{2i}) \right)^3 \right]}{\sigma_{\lambda_i}^3} \quad (3.76)$$

ovvero, semplificando e facendo uso della (3.75)₂:

$$\gamma_{a\lambda_i} = \frac{E \left[\left(\theta\lambda_{1i} + \theta^2\lambda_{2i} - \mu_\theta\lambda_{1i} - (\sigma_\theta^2 + \mu_\theta^2)\lambda_{2i} \right)^3 \right]}{\left(\sigma_\theta^2\lambda_{1i}^2 + 2\mu_\theta\sigma_\theta^2(2\lambda_{1i}\lambda_{2i}) + (2\sigma_\theta^4 + 4\mu_\theta^2\sigma_\theta^2)\lambda_{2i}^2 \right)^{3/2}} \quad (3.77)$$

A questo punto è sufficiente operare con una serie di manipolazioni semplici, qui omesse per brevità: sviluppare la potenza al cubo al numeratore, utilizzare le regole di sostituzione di Tabella B.1 per i momenti non centrali di una variabile gaussiana e semplificare ove possibile; così facendo si ottiene:

$$\gamma_{a\lambda_i} = \frac{2\sigma_\theta\lambda_{2i}(4\sigma_\theta^2\lambda_{2i}^2 + 3(\lambda_{1i} + 2\mu_\theta\lambda_{2i})^2)}{(2\sigma_\theta^2\lambda_{2i}^2 + (\lambda_{1i} + 2\mu_\theta\lambda_{2i})^2)^{3/2}} \quad (3.78)$$

Per il coefficiente di eccesso del generico autovalore λ_i si ha invece:

$$\gamma_{e\lambda_i} = \frac{\mathfrak{M}_4}{\sigma^4} - 3 = \frac{E \left[\left((\lambda_{0i} + \theta\lambda_{1i} + \theta^2\lambda_{2i}) - (\lambda_{0i} + \mu_\theta\lambda_{1i} + (\mu_\theta^2 + \sigma_\theta^2)\lambda_{2i}) \right)^4 \right]}{\sigma_{\lambda_i}^4} - 3$$

ovvero, semplificando e utilizzando la (3.75)₂:

$$\gamma_{a\lambda_i} = \frac{E \left[\left(\theta\lambda_{1i} + \theta^2\lambda_{2i} - \mu_\theta\lambda_{1i} - (\sigma_\theta^2 + \mu_\theta^2)\lambda_{2i} \right)^4 \right]}{\left(\sigma_\theta^2\lambda_{1i}^2 + 2\mu_\theta\sigma_\theta^2(2\lambda_{1i}\lambda_{2i}) + (2\sigma_\theta^4 + 4\mu_\theta^2\sigma_\theta^2)\lambda_{2i}^2 \right)^2} - 3 \quad (3.79)$$

Procedendo in maniera analoga a quanto visto per il coefficiente di asimmetria, si sviluppa la potenza alla quarta al numeratore, si utilizzano le regole di sostituzione di Tabella B.1 per i momenti non centrali di una variabile gaussiana e si semplifica ove possibile. Omettendo per brevità tutti i passaggi, non complessi ma alquanto lunghi, il risultato che si ottiene è il seguente:

$$\gamma_{e\lambda_i} = \frac{48\sigma_\theta^2\lambda_{2i}^2(\sigma_\theta^2\lambda_{2i}^2 + (\lambda_{1i} + 2\mu_\theta\lambda_{2i})^2)}{(2\sigma_\theta^2\lambda_{2i}^2 + (\lambda_{1i} + 2\mu_\theta\lambda_{2i})^2)^2} \quad (3.80)$$

Ripetendo le dimostrazioni precedenti con riferimento al generico autovettore ϕ_i , si ottengono per l'autosoluzione le seguenti relazioni del coefficiente di asimmetria:

$$\begin{cases} \gamma_{a\lambda_i} = \frac{2\sigma_\theta\lambda_{2i}(4\sigma_\theta^2\lambda_{2i}^2 + 3(\lambda_{1i} + 2\mu_\theta\lambda_{2i})^2)}{(2\sigma_\theta^2\lambda_{2i}^2 + (\lambda_{1i} + 2\mu_\theta\lambda_{2i})^2)^{3/2}} \\ \gamma_{a\phi_i} = \frac{2\sigma_\theta\phi_{2i} \diamond (4\sigma_\theta^2\phi_{2i}^{\diamond 2} + 3(\phi_{1i} + 2\mu_\theta\phi_{2i})^{\diamond 2})}{(2\sigma_\theta^2\phi_{2i}^{\diamond 2} + (\phi_{1i} + 2\mu_\theta\phi_{2i})^{\diamond 2})^{\diamond 3/2}} \end{cases} \quad (3.81)$$

e del coefficiente di eccesso:

$$\begin{cases} \gamma_{e\lambda_i} = \frac{48\sigma_\theta^2 \lambda_{2i}^2 (\sigma_\theta^2 \lambda_{2i}^2 + (\lambda_{1i} + 2\mu_\theta \lambda_{2i})^2)}{(2\sigma_\theta^2 \lambda_{2i}^2 + (\lambda_{1i} + 2\mu_\theta \lambda_{2i})^2)^2} \\ \gamma_{e\phi_i} = \frac{48\sigma_\theta^2 \phi_{2i}^{\circ 2} (\sigma_\theta^2 \phi_{2i}^{\circ 2} + (\phi_{1i} + 2\mu_\theta \phi_{2i})^{\circ 2})}{(2\sigma_\theta^2 \phi_{2i}^{\circ 2} + (\phi_{1i} + 2\mu_\theta \phi_{2i})^{\circ 2})^2} \end{cases} \quad (3.82)$$

Si precisa come, coerentemente con il significato attribuito a questi coefficienti (misure della *distanza* da una distribuzione gaussiana), sia le (3.81) che le (3.82) si annullano se si trascurano i termini del secondo (al primo ordine la distribuzione è infatti gaussiana). I due coefficienti sono altresì nulli nel caso deterministico, come è evidente ponendo $\sigma_\theta = 0$ nelle relazioni precedenti.

3.7.4 Esempio

Si analizza nuovamente il sistema a 4 gradi di libertà di Figura 3.1; per una descrizione completa delle caratteristiche dello stesso si veda quanto già riportato al § 3.6.3.

Ai fini dell'approccio perturbativo, l'applicazione delle (3.62) fornisce immediatamente:

$$\mathbf{M}_2 = \mathbf{0} \quad \mathbf{K}_2 = \mathbf{0} \quad (3.83)$$

mentre i termini di ordine 0 e 1, ossia $\mathbf{M}_0$, $\mathbf{M}_1$, $\mathbf{K}_0$ e $\mathbf{K}_1$, restano banalmente gli stessi di cui al succitato § 3.6.3.

Si rianalizzano quindi i due casi (perturbati):

- caso 1 - deterministico: $\mu_\theta \in (0, 0.5]$, $\sigma_\theta^2 = 0$;
- caso 2 - aleatorio: $\mu_\theta \in (0, 0.5]$, $\sigma_\theta^2 = (0.05 \mu_\theta)^2$;

e si confronta la soluzione ottenuta con l'approccio perturbativo (PA), ovvero tramite le relazioni da (3.65) a (3.82), con la soluzione del problema agli autovalori (3.32): per il caso deterministico sostituendo il valore corrente di μ_θ , ovvero valutando l'andamento dell'autosoluzione (ES) al variare del parametro; per il caso aleatorio eseguendo una simulazione Monte Carlo (MC) di 5000 campioni per ogni valore corrente di $(\mu_\theta, \sigma_\theta^2)$.

I risultati ottenuti in termini di autovalori e autovettori sono illustrati in Figura 3.9, per il caso 1, e in Figura 3.10, per il caso 2, e seguono le stesse convenzioni già usate per il caso di approccio perturbativo al primo ordine:

- caso 1 - deterministico: le curve continue e tratteggiate indicano rispettivamente la soluzione esatta del problema agli autovalori (ES) e la soluzione approssimata ottenuta con approccio perturbativo (PA);

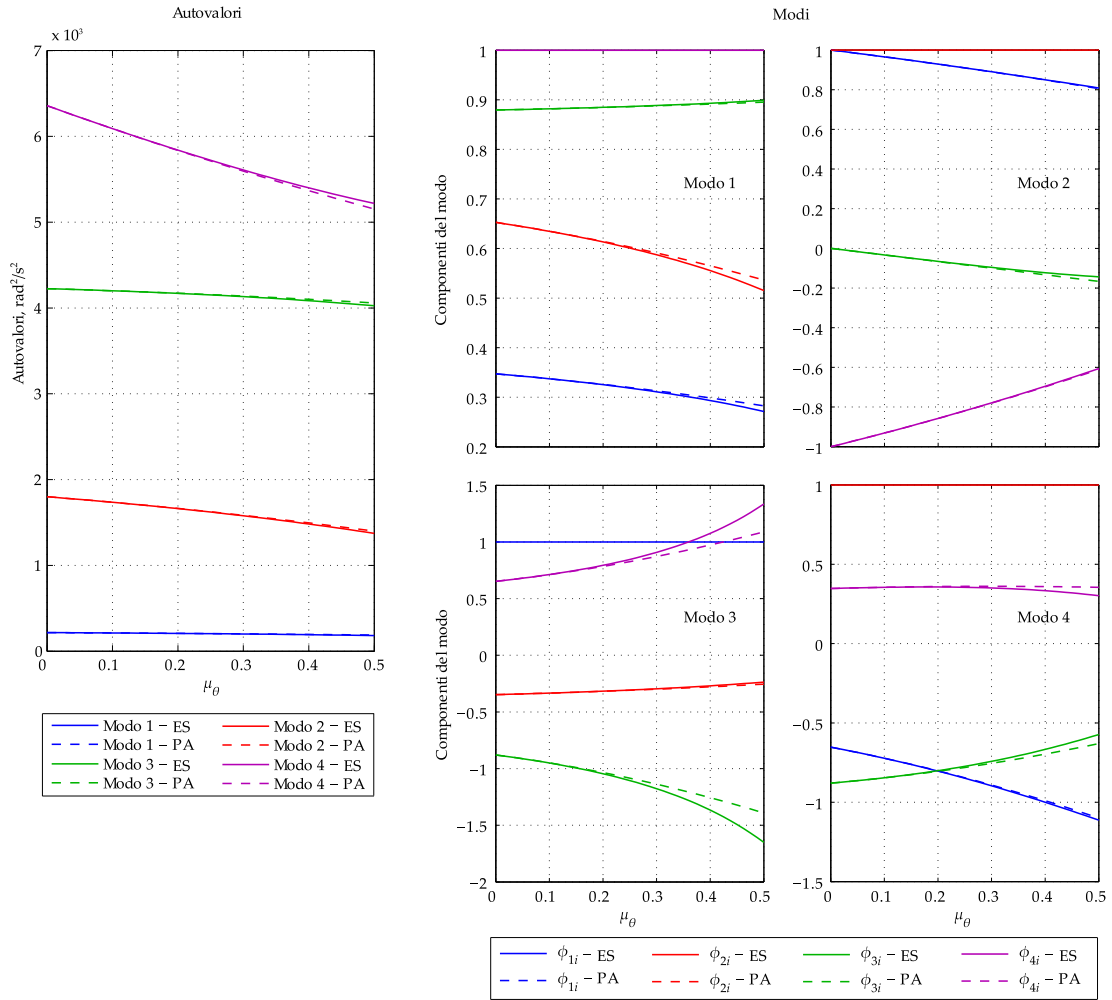


Figura 3.9: Andamento dell'autosoluzione al variare del parametro θ , caso 1.

- caso 2 - aleatorio: le curve continue e tratteggiate a tratto spesso indicano rispettivamente il valore medio fornito dalle simulazioni Monte Carlo del problema agli autovalori (MC) e quello approssimato ottenuto con approccio perturbativo (PA); le curve continue e tratteggiate a tratto sottile, riferite rispettivamente alle simulazioni Monte Carlo (MC) e all'approccio perturbativo (PA), tracciano poi l'intervallo di confidenza ottenuto sommando e sottraendo 3 deviazioni standard al precedente valore medio (com'è noto, nel caso di distribuzione normale tale intervallo assicura una probabilità del 99.7 %);

e si ricorda che i grafici assumono la componente massima rispetto a cui i modi erano stati precedentemente scalati come componente di riferimento (unitaria per tutti i valori del parametro).

L'errore commesso usando l'approccio perturbativo, crescente man mano che ci si

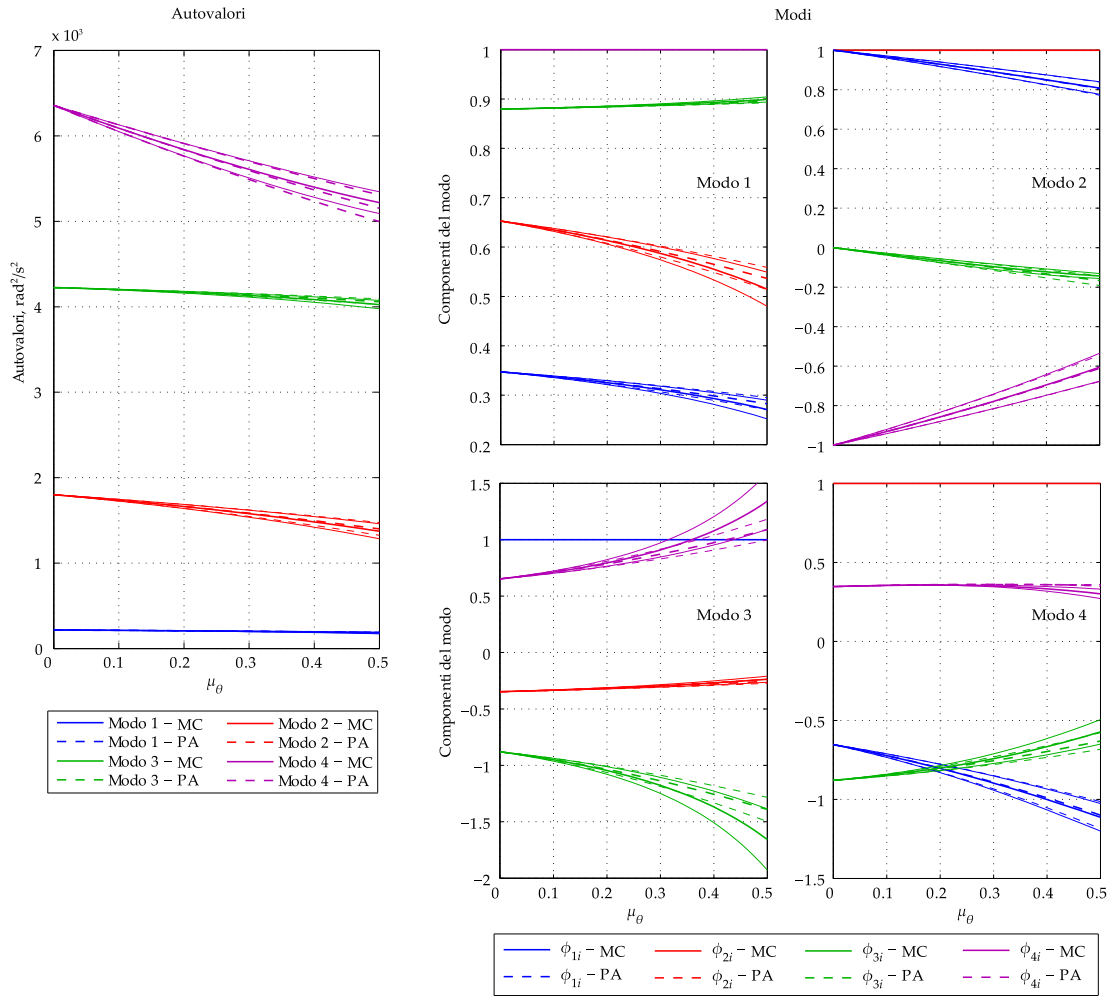


Figura 3.10: Andamento dell'autosoluzione al variare del parametro θ , caso 2.

allontana dalla soluzione imperturbata, è misurato attraverso i seguenti confronti:

- caso 1 - deterministico: confronto tra le medie fornite dalla soluzione esatta del problema agli autovalori (ES) e quelle approssimate ottenute con l'approccio perturbativo (PA);
- caso 2 - aleatorio: confronto tra le medie e le deviazioni standard fornite dalle simulazioni Monte Carlo (MC) con quelle ottenute con l'approccio perturbativo (PA). Per i valori dei coefficienti di asimmetria ed eccesso si veda quanto riportato più avanti;

ove i confronti relativi alle componenti dei modi sono da intendersi scevri della componente di riferimento.

I risultati ottenuti possono così sintetizzarsi:

- le curve continue, per il caso 1 (ES vs PA), e quelle tratteggiate, per il caso 2 (MC vs PA), di Figura 3.11 mostrano le differenze percentuali tra le medie. Gli andamenti mostrano che, passando da un approccio perturbativo al primo ordine a uno al secondo ordine, l'errore massimo (in valore assoluto) cala dal 10 al 4 %, per gli autovettori, e dal 30 al 20 %, per gli autovettori. Inoltre, anche al secondo ordine si ritrova che le curve continue, relative al caso deterministico, sono praticamente indistinguibili da quelle tratteggiate, relative al caso aleatorio. Questo è dovuto alla concomitanza di due circostanze: le differenze percentuali tra le medie fornite dalla soluzione esatta del problema agli autovalori deterministico (ES) e quelle relative al problema aleatorio ottenute dalla simulazione Monte Carlo (MC) sono estremamente contenute, come già mostrato in Figura 3.7; poi, seppure con un'approccio perturbativo al secondo ordine l'autosoluzione media dipende anche dalle varianze dei parametri (cfr. equazione 3.65), è immediato verificare che, per i valori assunti, il peso del contributo sia poco significativo, i.e., caso 1 e caso 2 posseggono medie molto prossime;
- per il caso aleatorio, le differenze percentuali tra le deviazioni standard (MC vs PA) testimoniano, come già riscontrato, che l'approccio perturbativo fornisce risultati più attendibili per gli autovalori che per le componenti dei modi. Circa il passaggio da un approccio perturbativo al primo ordine a uno al secondo ordine, anche la riduzione dell'errore massimo (in valore assoluto) è più marcata per gli autovettori che per gli autovettori. Infine, si rileva nuovamente il particolare comportamento della quarta componente del quarto modo di cui al § 3.6.3.

Si riportano in ultimo i valori del coefficiente di asimmetria o Skewness e del coefficiente di eccesso o Kurtosis in eccesso (cfr. Appendice B) ottenuti tramite l'approccio

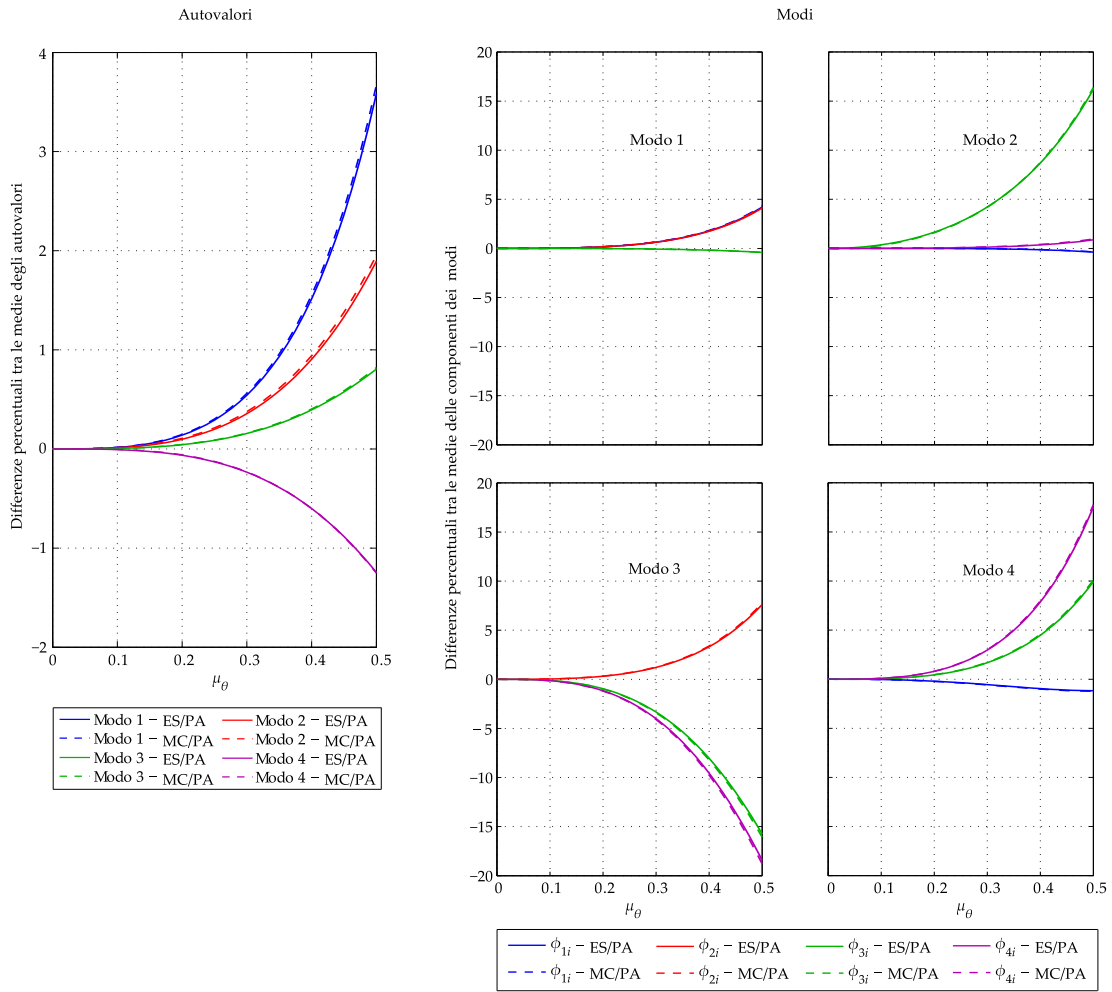


Figura 3.11: Differenze percentuali tra le medie, caso 1 (ES vs PA) e caso 2 (MC vs PA).

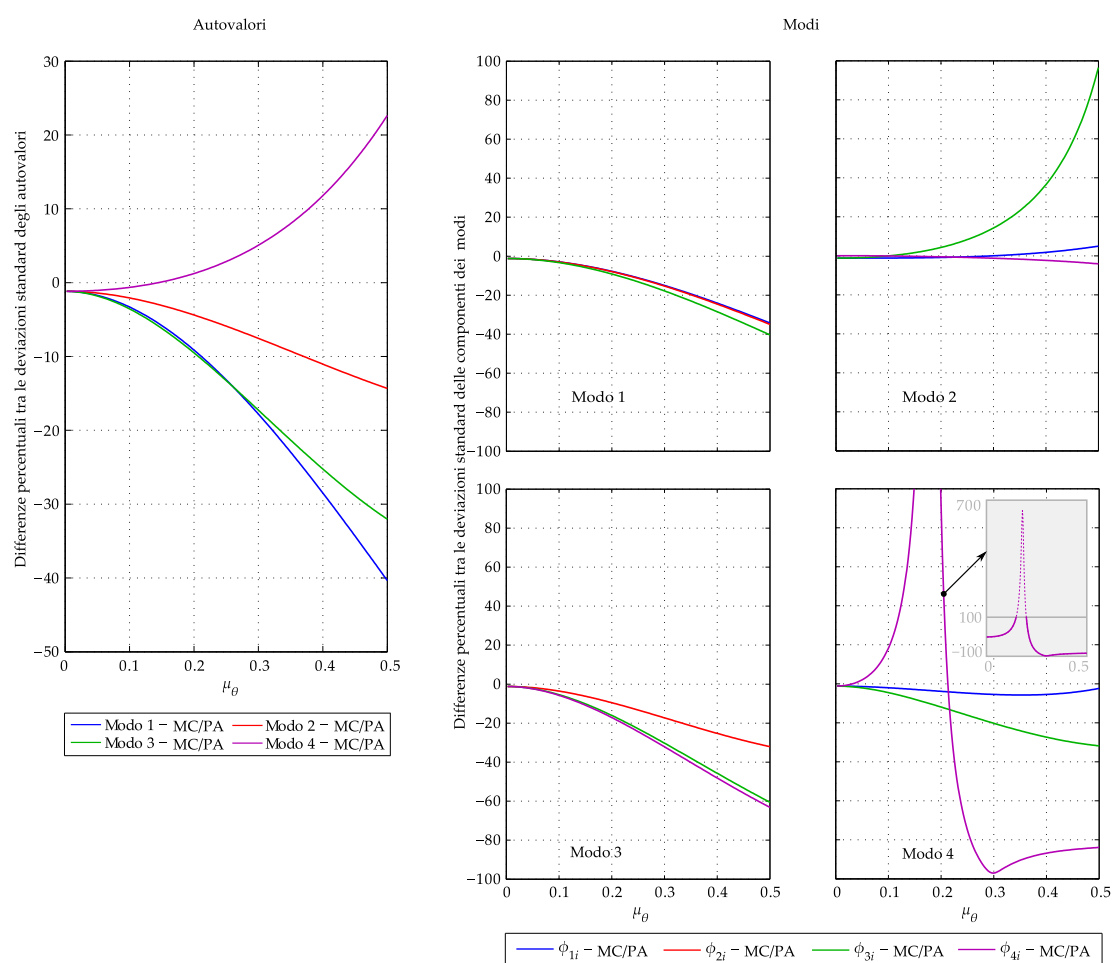


Figura 3.12: Differenze percentuali tra le deviazioni standard, caso 2 (MC vs PA).

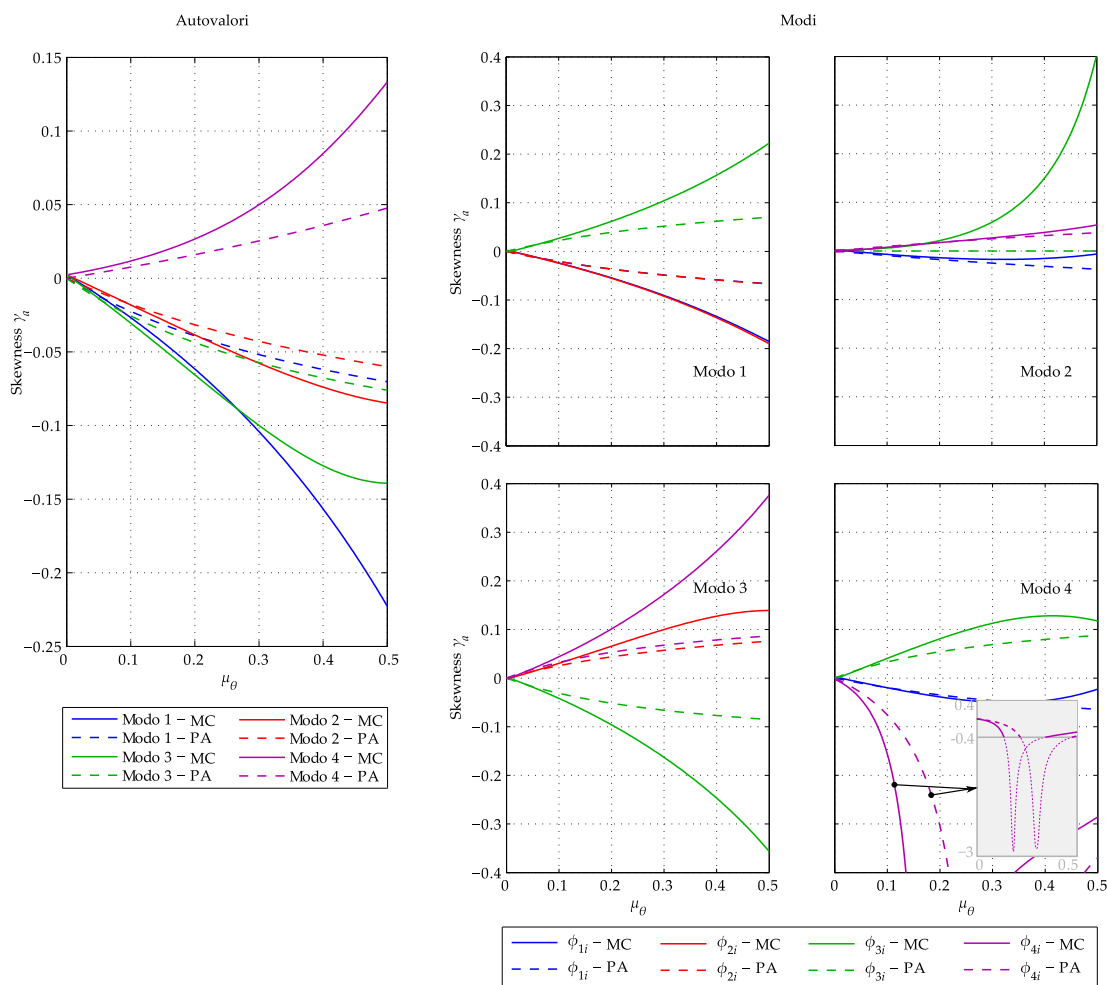
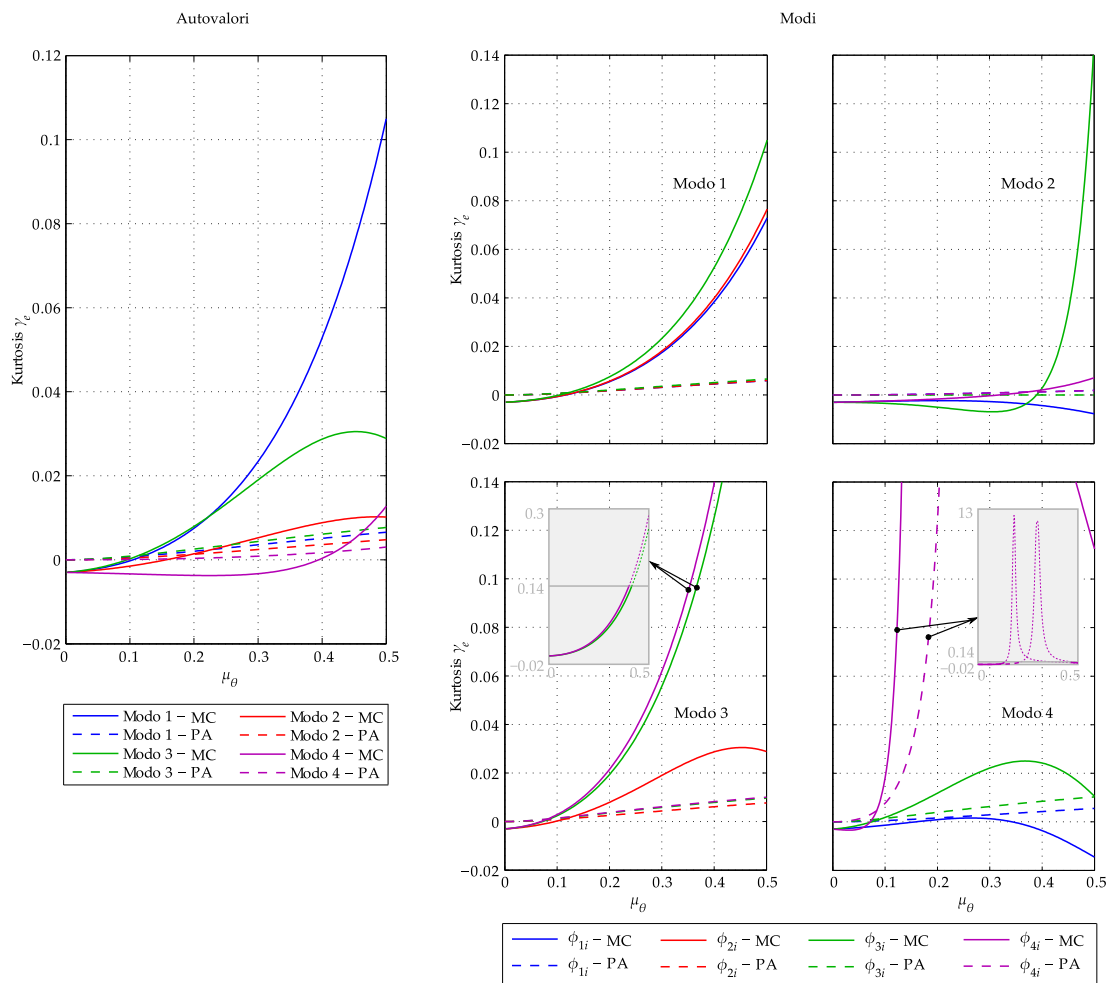


Figura 3.13: Andamento del coefficiente di asimmetria γ_a , caso 2.

perturbativo (PA), i.e., tramite le (3.81) e (3.82), e con le simulazioni Monte Carlo (MC); si ricorda che nel caso di approccio perturbativo al primo ordine entrambi i coefficienti risultavano essere nulli (sia autovalori che autovettori avevano distribuzione gaussiana, cfr. § 3.6.2).

Gli andamenti di Figura 3.13 e 3.14 testimoniano che l'approccio perturbativo sviluppato fornisce soltanto una stima grossolana dei due coefficienti. Tuttavia, visti i valori⁶, è possibile concludere che le distribuzioni dell'autosoluzione in esame sono approssimativamente gaussiane (si conferma, però, il particolare comportamento della

⁶Interpretazione dei coefficienti di asimmetria ed eccesso: in [3.6] si suggerisce che una distribuzione è da ritenersi fortemente asimmetrica se γ_a è minore di -1 o maggiore di 1, moderatamente asimmetrica per valori tra -1 e -1/2 o 1/2 e 1, e approssimativamente simmetrica nei restanti casi, cioè per γ_a compreso tra -1/2 e 1/2. Sul coefficiente di eccesso, invece, non sono note a chi scrive indicazioni precise a riguardo, ma la prassi vuole che una distribuzione possa considerarsi normocurtica per valori di γ_e compresi tra -1/2 e 1/2.

Figura 3.14: Andamento del coefficiente di eccesso γ_e , caso 2.

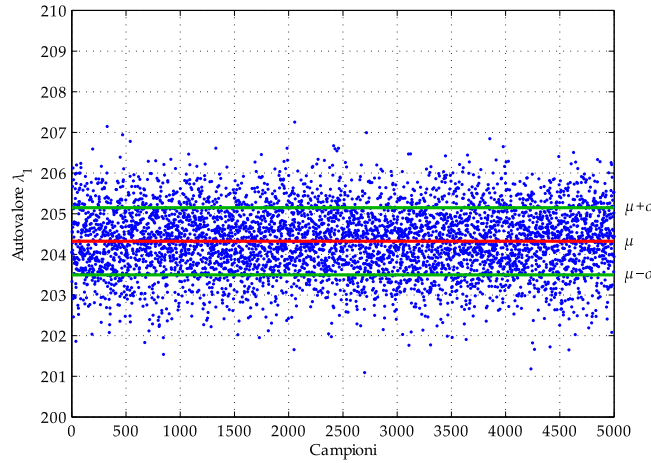


Figura 3.15: Simulazione Monte Carlo dell'autovalore λ_1 (caso 2) per $\mu_\theta = 0.25$ e $\sigma_\theta = 0.0125$.

quarta componente del quarto modo).

A titolo esplicativo, si analizza nel dettaglio la distribuzione dell'autovalore λ_1 in corrispondenza dei valori $\mu_\theta = 0.25$ e $\sigma_\theta = 0.0125$ del parametro. Il risultato fornito dai 5000 campioni della simulazione è riportato in Figura 3.15, in cui sono altresì evidenziati i valori della media e della deviazione standard.

L'istogramma normalizzato corrispondente a tale simulazione Monte Carlo (per fissare il numero di bin si è usato il metodo *square root*) è riportato in Tabella 3.2; in effetti, risulta essere molto prossimo a una distribuzione gaussiana della densità di probabilità. Confrontando tali risultati con quelli dell'approccio perturbativo, in termini sia di dati (media, deviazione standard, skewness, kurtosis e rispettive differenze percentuali Δ) che di grafici, è infine possibile sia apprezzare l'effetto dei termini del secondo ordine, che confermare, al netto della discrepanza residua, la somiglianza dell'istogramma a una distribuzione normale.

Si precisa che la distribuzione di probabilità relativa all'approccio perturbativo al secondo ordine è stata graficata come una gaussiana, cosa valida, a rigore, soltanto al primo ordine. Anche se gli esigui coefficienti di asimmetria e kurtosis suggeriscono che l'errore commesso con tale approssimazione è da ritenere ridotto, è possibile meglio indagare questa incongruenza. Infatti, la teoria della probabilità stabilisce che una dipendenza funzionale tra due variabili aleatorie x e y del tipo $y = y(x)$ impone alle corrispondenti distribuzioni di probabilità $p_x(x)$ e $p_y(y)$ il soddisfacimento della relazione:

$$p_y(y)|dy| = p_x(x)|dx| \quad (3.84)$$

λ_1	MC	PA	
		1° ordine	2° ordine
μ	204.3223	207.1395	204.9410
σ	0.8265	0.4984	0.7177
γ_a	-0.0818	0	-0.0458
γ_e	0.0142	0	0.0028
$\Delta\mu$	-	1.38 %	0.30 %
$\Delta\sigma$	-	-39.70 %	-13.16 %
$\Delta\gamma_a$	-	-	44.00 %
$\Delta\gamma_e$	-	-	-80.28 %

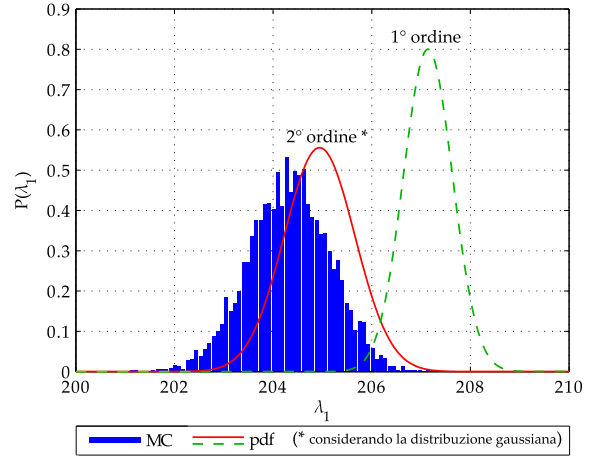


Tabella 3.2: Distribuzioni dell'autovalore λ_1 (caso 2) per $\mu_\theta = 0.25$ e $\sigma_\theta = 0.0125$.

da cui:

$$p_y(x) = \frac{p_x(x)}{|dy(x)/dx|} \quad (3.85)$$

che per l'applicazione di cui sopra fornisce:

$$p_{\lambda_1}(\theta) = \frac{p_\theta(\theta)}{|d\lambda_1(\theta)/d\theta|} \quad (3.86)$$

Nella relazione precedente, il primo membro è quello incognito, mentre i termini al secondo membro sono noti:

$$p_\theta(\theta) = \mathcal{N}(\mu_\theta, \sigma_\theta^2) \quad \frac{d\lambda_1(\theta)}{d\theta} = \frac{(\lambda_{0i} + \theta\lambda_{1i} + \theta^2\lambda_{2i})|_{i=1}}{d\theta} = (\lambda_{1i} + 2\theta\lambda_{2i})|_{i=1} \quad (3.87)$$

ottenendo in definitiva:

$$p_{\lambda_1}(\theta) = \frac{\mathcal{N}(\mu_\theta, \sigma_\theta^2)}{|\lambda_{1i} + 2\theta\lambda_{2i}|} \Big|_{i=1} \quad (3.88)$$

relazione che testimonia, come già dimostrato in precedenza per altra via, che al primo ordine la distribuzione dell'autosoluzione è ancora gaussiana (al primo ordine sopravvive infatti soltanto il fattore di scala $1/\lambda_{1i}$). Per ottenere la relazione cercata $p_{\lambda_1}(\lambda_1)$ si scrive infine:

$$p_{\lambda_1}(\lambda_1) = \frac{\mathcal{N}(\mu_\theta, \sigma_\theta^2)}{|\lambda_{1i} + 2\theta\lambda_{2i}|} \Big|_{\theta=\theta(\lambda_i), i=1} \quad (3.89)$$

Il grafico di Figura 3.16 riporta gli andamenti delle distribuzioni *effettiva* (sotto l'ipotesi di approssimazione al secondo ordine, ovvero come da equazione (3.89)) e gaussiana: la discrepanza che se ne desume è molto ridotta; se da una parte questo risultato conferma, come già preannunciato sulla base dei coefficienti di asimmetria e

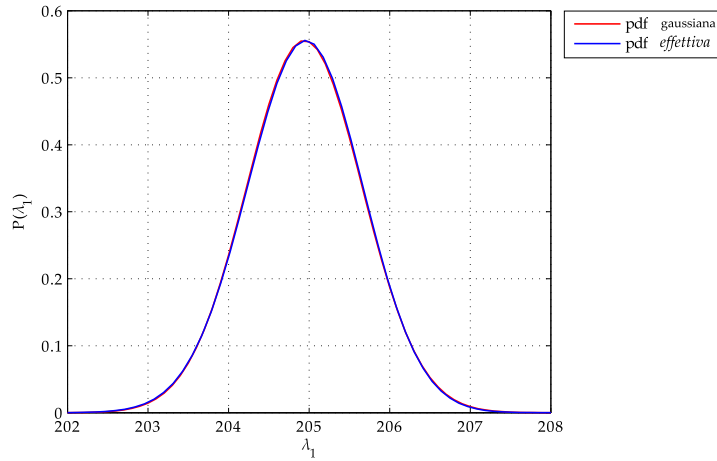


Figura 3.16: Distribuzioni dell'autovalore λ_1 al secondo ordine: confronto tra la distribuzione *effettiva* e quella *gaussiana*.

kurtosis, che la distribuzione in questione ha un andamento molto prossimo a quello gaussiano, dall'altra testimonia come, se d'interesse, l'approccio perturbativo sia in grado di fornire non solo le statistiche dell'autosoluzione, ma anche le corrispondenti distribuzioni di probabilità.

3.8 Irregolarità nelle distribuzioni

Nello studio delle statistiche dell'autosoluzione si è sottolineata la presenza di alcune irregolarità nelle distribuzioni, sia nel raffronto tra le deviazioni standard, cfr. Figura 3.8 e Figura 3.12, per il caso al primo e al secondo ordine, rispettivamente, sia nel calcolo dei momenti normalizzati del terzo e quarto ordine, cfr. Figura 3.13 e Figura 3.14, per il coefficiente di asimmetria e di eccesso, rispettivamente. Tali fenomeni, riferiti alla quarta componente del quarto modo, sono stati registrati in corrispondenza dell'inversione di ordine tra la prima e la terza componente dello stesso modo, cfr. Figura 3.5 e Figura 3.10, per il caso al primo e al secondo ordine, rispettivamente.

Poiché da una ricerca nella letteratura il fenomeno non sembra essere mai stato rilevato, vale la pena approfondirlo, cercando di delinearne le caratteristiche. Allo scopo, in Figura 3.17 si ripropongono le statistiche di ordine dal primo al quarto ottenute con la simulazione Monte Carlo (MC) e con l'approccio perturbativo (al primo ordine, PA_1 e al secondo, PA_2) nel consueto range $\mu_\theta \in (0, 0.5]$, $\sigma_\theta^2 = (0.05\mu_\theta)^2$ (il caso denominato 2 in precedenza): mentre la media presenta un andamento regolare, lo stesso non si verifica per la deviazione standard, che tende ad annullarsi per poi ricrescere, e ancor di più per il coefficiente di asimmetria e per quello d'eccesso che mostrano una cuspide.

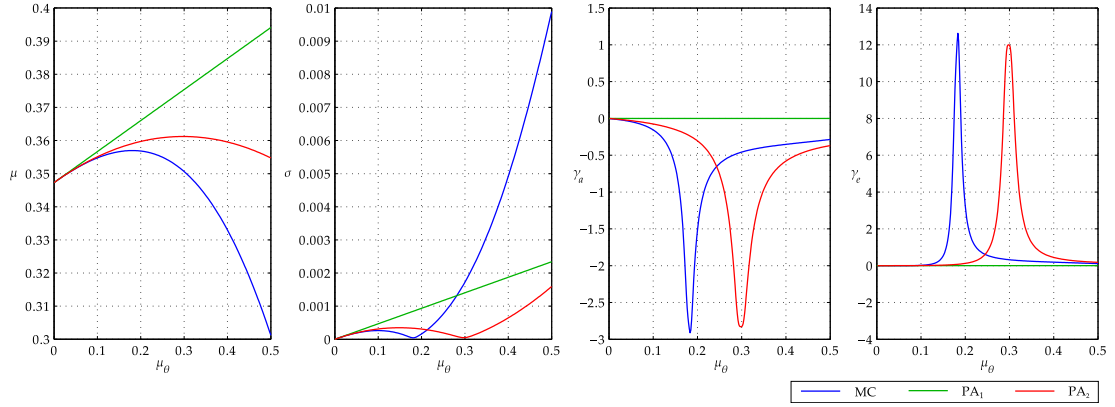


Figura 3.17: Andamento delle prime quattro statistiche della quarta componente del quarto modo (caso 2).

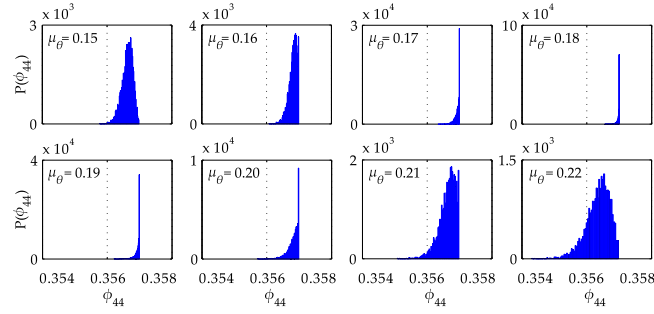


Figura 3.18: Istogrammi normalizzati della quarta componente del quarto modo.

Peraltro, il fenomeno è colto, seppure in maniera sommaria, anche con l'approccio perturbativo (per il coefficiente di asimmetria e per quello d'eccesso è necessario almeno un approccio del secondo ordine dato che, come più volte richiamato, al primo ordine l'autosoluzione presenta una distribuzione gaussiana).

Per meglio apprezzare questi risultati, in Figura 3.18 si riportano gli istogrammi normalizzati forniti dalle simulazioni Monte Carlo nell'intorno dell'irregolarità della risposta (per fissare il numero di bin si è usato il metodo *square root*): gli andamenti di figura confermano ed enfatizzano un cambiamento qualitativo significativo nelle distribuzioni. Concludendo, il fenomeno sembra essere d'interesse e come possibile prospettiva futura potrebbe essere utile indagare sotto quali condizioni tali irregolarità si presentano, ovvero, in che misura esse dipendono dal modello strutturale adottato (ivi comprese le distribuzioni di partenza dei parametri incerti) e dallo scalamento effettuato sui modi.

Bibliografia

- [3.1] S. Adhikari. *"Uncertainty propagation in linear systems: an exact solution using random matrix theory"*. 48th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics & Materials Conference, 2007.
- [3.2] S. Adhikari e M. I. Friswell. *"Random eigenvalue problems in structural dynamics"*. 45th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics & Materials Conference, 2004.
- [3.3] S. Adhikari e R. S. Langley. *"Distribution of eigenvalues of linear stochastic systems"*. 9th International Conference on Applications of Statistics and Probability in Civil Engineering, ICASP, 2003.
- [3.4] G. W. Anderson, A. Guionnet, e O. Zeitouni. *"An introduction to random matrices"*. Cambridge University Press, 1^a edizione, 2009.
- [3.5] S. Benfratello e G. Muscolino. *"A perturbation approach for the response of dynamically modified structural systems"*. *Computers & Structures*, 68(1-3):101–112, 1998.
- [3.6] M. G. Bulmer. *"Principles of Statistics"*. Dover Publications, 2^a edizione, 1979.
- [3.7] A. K. Chopra. *"Dinamycs of structures"*, volume 2 di *Engineering monographs on earthquake criteria, structural design, and strong motion records*. Earthquake engineering research institute, 1^a edizione, 1980.
- [3.8] A. Dixit. *"Damage modeling and damage detection for structures using a perturbation method"*. Tesi di dottorato - Georgia Institute of Technology, 2012.
- [3.9] I. Elishakoff, Y. J. Ren, e M. Shinozuka. *"Improved finite element method for stochastic structures"*. *Chaos Solit. Fract.*, 5(5):833–846, 1995.
- [3.10] G. Falsone e N. Impollonia. *"A new approach for the stochastic analysis of finite element modelled structures with uncertain parameters"*. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 191(44):5067–5085, 2002.
- [3.11] N. Impollonia e G. Muscolino. *"Static and dynamic analysis of non-linear uncertain structures"*. *Meccanica*, 37(1-2):179–192, 2002.
- [3.12] M. Kaminski. *"Generalized stochastic perturbation technique in engineering computations"*. *Mathematical and Computer Modelling*, 51(3-4):272–285, 2010.

-
- [3.13] T. Kato. *"Perturbation theory for linear operators"*. Springer-Verlag, 2^a edizione, 1995.
- [3.14] H. H. Khodaparast, J. E. Mottershead, e M. I. Friswell. *"Perturbation methods for the estimation of parameter variability in stochastic model updating"*. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 22(8):1751–1773, 2008.
- [3.15] R. Lebrun e A. Dutfoy. *"Do Rosenblatt and Nataf isoprobabilistic transformations really differ?"*. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 24(4):172–178, 2009.
- [3.16] M. Lepidi. *"Multi-parameter perturbation methods for the eigensolution sensitivity analysis of nearly-resonant non-defective multi-degree-of-freedom systems"*. *Journal of Sound and Vibration*, 332(4):1011–1032, 2013.
- [3.17] A. Luongo. *"Metodi perturbativi nell'analisi agli autovalori di strutture imperfette ad elevata densità modale. Parte 1: Teoria"*. *Atti Accademia Peloritana dei Pericolanti - Classe I di Scienze Fis. Mat. e Nat.*, 68(1):401–423, 1988.
- [3.18] A. Luongo. *"Eigensolutions sensitivity for nonsymmetric matrices with repeated eigenvalues"*. *AIAA Journal*, 31(7):1321–1328, 1993.
- [3.19] C. S. Manohar e R. A. Ibrahim. *"Progress in structural dynamics with stochastic parameter variations: 1987 to 1996"*. *Applied Mechanics Reviews*, 52(5):177–197, 1999.
- [3.20] J. A. Murdock. *"Perturbations. Theory and methods"*. John Wiley & Sons, 1^a edizione, 1991.
- [3.21] G. Muscolino, G. Ricciardi, e N. Impollonia. *"Improved dynamic analysis of structures with mechanical uncertainties under deterministic input"*. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 15(2):199–212, 2000.
- [3.22] G. Muscolino, R. Santoro, e A. Sofi. *"Explicit frequency response functions of discretized structures with uncertain parameters"*. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 133(1):64–78, 2014.
- [3.23] C. Soize. *"Stochastic modeling of uncertainties in computational structural dynamics. Recent theoretical advances"*. *Journal of Sound and Vibration*, 332(10):2379–2395, 2013.
- [3.24] G. Strang e G. Fix. *"An analysis of the finite element method"*. Wellesley-Cambridge Press, 2^a edizione, 2008.

Pagina lasciata intenzionalmente bianca.

Capitolo 4

Problema inverso

4

Stabilite le caratteristiche stocastiche del problema dinamico diretto, il metodo d'identificazione proposto nell'ambito del problema inverso si basa sulla minimizzazione di una funzione obiettivo che valuta le medie e le varianze dei parametri a partire dalle prime due medie stocastiche di autovalori e autovettori.

4.1 Premessa

La maggior parte delle applicazioni di dinamica strutturale basano il loro successo sull'accuratezza del modello matematico interpretativo della struttura; tuttavia, a causa delle complessità presenti nelle strutture reali, il modello, per quanto meticolosa possa essere la modellazione, non può che fornire una rappresentazione più o meno approssimata dell'effettivo comportamento del sistema. Per questo motivo, le misurazioni al vero della risposta strutturale sono uno strumento essenziale di analisi.

Mentre nell'ambito del problema diretto si opera generalmente con un modello fisico (di solito derivato da una simulazione agli elementi finiti FE), in ambito dinamico sperimentale si preferisce, differentemente, utilizzare un modello modale, cfr. § 2.5.1. La strategia d'identificazione strutturale seguita per ricostruire il modello fisico, nota anche come *model updating*, consiste nell'effettuare una prima stima del modello fisico da aggiornare poi utilizzando il modello modale sperimentale.

Un problema di grande interesse in ambito inverso è poi l'identificazione delle modifiche nei parametri strutturali, specialmente quelle che implicano un danneggiamento strutturale, ovvero, una modifica nello stato di salute dell'opera. I cambiamenti fisici, in termini di massa, rigidità o smorzamento, alterano certamente il comportamento dinamico del sistema, pertanto, effettuata una nuova campagna sperimentale, è possibile utilizzare la stessa procedura di model updating descritta precedentemente per aggiornare nuovamente il modello fisico. Nello specifico, si utilizza il modello fisico aggiornato nella prima campagna sperimentale come prima stima, e lo si aggiorna sulla base dei risultati della seconda campagna sperimentale. Dal confronto tra i due modelli fisici è possibile stimare le modifiche nei parametri strutturali. L'operazione può essere ulteriormente ripetuta, *continuous model updating*, in modo da garantire nel tempo un monitoraggio delle prestazioni dell'opera; inoltre, può essere effettuata con riferimento sia a strutture deterministiche sia stocastiche. La principale difficoltà è che, in entrambi i casi, ma a maggior ragione per il caso aleatorio, la soluzione di questo problema inverso potrebbe non essere univoca oppure non esistere.

La filosofia del model updating potrebbe essere messa in discussione da alcuni analisti. Tra gli approcci dedicati all'aggiornamento diretto del modello fisico, si ricordano [4.14], tra quelli a carattere deterministico, e [4.4], tra quelli stocastici. Altri metodi, utilizzati anche recentemente [4.10], sono dedicati all'identificazione di media [4.12] e varianza [4.13] delle matrici di massa e rigidità sulla base dell'ottimizzazione del filtro di Kalman esteso.

In questa sede l'utilizzo della tecnica del model updating è motivato sia dall'esperienza, che ha giustificato i meriti del metodo [4.18, 5], sia dalla prassi operativa che, come già precisato, predilige in ambito dinamico sperimentale il modello modale. Allo scopo, nel capitolo precedente si sono analizzate le relazioni che intercorrono tra un modello fisico discreto a parametri incerti e il corrispondente modello modale. In particolare, si è utilizzato un approccio perturbativo al secondo ordine per ricavare in forma esplicita le medie e le covarianze dell'autosoluzione corrispondenti a un set di parametri incerti gaussiani e indipendenti. In questa sede, operando in direzione inversa, si vogliono ricavare le medie e le varianze dei parametri incerti note che siano le distribuzioni di frequenze e modi di vibrazione. Il vantaggio del metodo proposto rispetto agli altri di letteratura è l'utilizzo di una funzione obiettivo capace di sfruttare i vantaggi computazionali dell'approccio perturbativo; la metodologia proposta è del tutto generale, in quanto indipendente dall'ordine di approssimazione raggiunto nella perturbazione. Per un confronto dettagliato con altri filoni di ricerca si rimanda al § 4.2.7.

4.2 Approccio perturbativo

Partendo dalle prove dinamiche, l'autosoluzione (frequenze e modi) di una struttura può essere ottenuta operando secondo le classiche tecniche d'identificazione dinamica modale, cfr. § 2.5.1; i risultati presenteranno una certa dispersione, di cui è immediato valutare media e varianza. Sfruttando le relazioni ottenute nel capitolo precedente tramite l'approccio perturbativo, a queste quantità sperimentali è possibile far corrispondere una controparte analitica funzione delle proprietà di massa e rigidità del modello fisico, in particolare, le (3.36) e (3.37), nel caso di soluzione al primo ordine, e le (3.65) e (3.74), nel caso al secondo ordine.

In tali equazioni le quantità perturbative $(\lambda_{0i}, \lambda_{1ik}, \lambda_{2ikl})$ e $(\phi_{0i}, \phi_{1ik}, \phi_{2ikl})$ sono da intendersi note (il concetto verrà chiarito al § 4.2.2), mentre le uniche grandezze incognite sono, indipendentemente dall'ordine di perturbazione, soltanto le $2m$ coppie $(\mu_{\theta_k}, \sigma_{\theta_k})$; $2m$ è, quindi, il numero delle incognite. Detto n il numero di gradi di libertà del modello fisico, il numero di equazioni non è però pari a $2n$ equazioni scalari (medie e varianze degli autovalori) più $2n$ equazioni vettoriali (medie e varianze degli autovettori), in quanto il numero di frequenze e modi misurati durante una prova dinamica è generalmente molto minore di n . Il problema posto può essere approssiato tramite la scrittura di una *funzione obiettivo*.

Una prima funzione obiettivo di tentativo potrebbe essere banalmente la seguente (una stima quadratica dell'errore):

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\mu_{\theta_k}, \sigma_{\theta_k}) = & \sum_{i=1}^{n_\lambda} (\mu_{\lambda_i} - \tilde{\mu}_{\lambda_i})^2 + (\sigma_{\lambda_i} - \tilde{\sigma}_{\lambda_i})^2 \\ & + \sum_{i=1}^{n_\phi} (\mu_{\phi_i} - \tilde{\mu}_{\phi_i})^\top (\mu_{\phi_i} - \tilde{\mu}_{\phi_i}) + (\sigma_{\phi_i} - \tilde{\sigma}_{\phi_i})^\top (\sigma_{\phi_i} - \tilde{\sigma}_{\phi_i}) \end{aligned} \quad (4.1)$$

ove i termini $(\mu_{\lambda_i}, \mu_{\phi_i}, \sigma_{\lambda_i}, \sigma_{\phi_i})$ sono quantità analitiche, funzione soltanto di $(\mu_{\theta_k}, \sigma_{\theta_k})$, mentre i termini $(\tilde{\mu}_{\lambda_i}, \tilde{\mu}_{\phi_i}, \tilde{\sigma}_{\lambda_i}, \tilde{\sigma}_{\phi_i})$ rappresentano le corrispondenti quantità misurate; n_λ e n_ϕ indicano invece il numero di autovalori e autovettori misurati, rispettivamente (con i vincoli $n_\lambda \leq n$ e $n_\phi \leq n$).

La (4.1), per quanto corretta da un punto di vista formale, è una formulazione che non garantisce, in generale, che le quantità scalari (gli autovalori) e le quantità vettoriali (gli autovettori) siano pesate correttamente e lo stesso dicasi per i valori medi e le varianze. Una formulazione in grado di garantire che tanto i termini vettoriali quanto le deviazioni standard siano pesati opportunamente nella funzione obiettivo è la seguente:

$$\mathcal{E}(\mu_{\theta_k}, \sigma_{\theta_k}) = \sum_{i=1}^{n_\lambda} \left(1 - \frac{K\lambda_i}{K\tilde{\lambda}_i}\right)^2 + \sum_{i=1}^{n_\phi} \left(1 - \sqrt{\text{MAC}(K\phi_i, K\tilde{\phi}_i)}\right)^2 \quad (4.2)$$

avendo indicato con K un certo frattile e dove le quantità $(^K\lambda_i, ^K\phi_i)$ sono quantità analitiche, funzione soltanto di $(\mu_{\theta_k}, \sigma_{\theta_k})$, mentre i termini $(^K\tilde{\lambda}_i, ^K\tilde{\phi}_i)$ sono la controparte misurata. I modi analitici sono da intendersi valutati soltanto nelle posizioni per le quali si dispone della misura sperimentale (in corrispondenza dei sensori), in modo che le dimensioni degli autovettori siano identiche.

L'idea di base è:

- confrontare gli autovalori in termini di errore normalizzato;
- confrontare gli autovettori con il **MAC** (*Modal Assurance Criterion*):

$$\text{MAC}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{|\mathbf{a}^\top \mathbf{b}|^2}{(\mathbf{a}^\top \mathbf{a})(\mathbf{b}^\top \mathbf{b})} \quad (4.3)$$

- confrontare le autosoluzioni utilizzando un certo frattile, in modo che la funzione obiettivo preservi il carattere stocastico del problema (se, come caso degenerare particolare, il problema è deterministico, la procedura continua a valere, con i frattili che collassano nei valori medi).

L'identificazione dei parametri incerti si concretizza con la ricerca del minimo globale:

$$(\tilde{\mu}_{\theta_k}, \tilde{\sigma}_{\theta_k}) = \arg \min \mathcal{E}(\mu_{\theta_k}, \sigma_{\theta_k}) \quad \sigma_{\theta_k} \geq 0 \quad + \text{altri vincoli} \quad (4.4)$$

ossia delle coppie $(\tilde{\mu}_{\theta_k}, \tilde{\sigma}_{\theta_k})$ che minimizzano la funzione obiettivo, con il vincolo $\sigma_{\theta_k} \geq 0$ (la deviazione standard è una quantità semidefinita positiva, che vale 0 soltanto nel caso deterministico) più gli altri vincoli dettati dalla fisica del problema (la massa e la rigidità di un elemento sono quantità strettamente positive).

4.2.1 Approfondimenti sulla funzione obiettivo

La (4.2) non è l'unica funzione obiettivo applicabile, per questo motivo appare opportuno giustificarne meglio l'utilizzo.

Ignorando per ora il concetto di frattile, la scelta di scrivere il contributo degli autovalori in termini di errore normalizzato:

$$\left(1 - \frac{^K\lambda_i}{^K\tilde{\lambda}_i}\right)^2 = \left(\frac{^K\lambda_i - ^K\tilde{\lambda}_i}{^K\tilde{\lambda}_i}\right)^2 \quad (4.5)$$

è abbastanza classica, anche se in genere ci si preferisce alle frequenze piuttosto che agli autovalori; qui l'utilizzo di questi ultimi piuttosto che dei primi è motivato dalla natura dell'approccio perturbativo, cfr. Nota 1 di pag. 59.

Più controverso è il contributo d'errore legato agli autovettori. Molti studi, tra questi [4.23, 16], preferiscono trascurare questo contributo, motivando l'utilizzo della

sola parte in autovalori dell'autosoluzione sulla base sia della robustezza di tali misure, sia, da un punto di vista pratico, della semplicità con cui le frequenze possono essere estratte (nel caso di autovettori è necessario predisporre una rete di sensori, nel caso di autovalori anche un solo sensore *opportunamente* posizionato può essere sufficiente per selezionare le frequenze d'interesse). Tuttavia, siccome non è da escludere a priori che almeno alcuni dei modi di vibrazione siano fedelmente misurati sperimentalmente, nella (4.2) si è comunque preferito contemplare anche la possibilità di inserire il corrispondente termine d'errore, qui valutato per tramite del Modal Assurance Criterion:

$$\left(1 - \sqrt{\text{MAC}({}^K\phi_i, {}^K\tilde{\phi}_i)}\right)^2 \quad (4.6)$$

Il MAC fu introdotto nei primi anni ottanta [4.2] come un criterio per verificare la qualità tra due set di autovettori, classicamente quelli misurati sperimentalmente e quelli analitici. Precedentemente, il metodo usuale di confronto prevedeva di ricorrere alle condizioni di ortogonalità dei modi di vibrare sperimentali rispetto alle matrici di massa e rigidità analitiche, ma, com'è evidente, il risultato di questo processo di controllo risultava essere contaminato dalla propagazione dell'errore nella valutazione delle matrici del sistema. Il MAC, invece, è una funzione a valori reali che confronta i due set di autovettori e assume un valore compreso tra 0 e 1, nello specifico: vale 0 se non esiste alcuna corrispondenza tra due autovettori e 1 se la corrispondenza è perfetta. Solitamente i risultati sono proposti in una forma matriciale, in cui le righe e le colonne afferiscono ai due set di autovettori, in modo che ogni elemento della matrice fornisca il valore del MAC dei due autovettori indicati dalla riga e dalla colonna corrispondenti. È importante sottolineare che, non essendo gli autovettori scalati rispetto alla matrice di massa o alla matrice di rigidità, il MAC è un controllo di qualità, non di ortogonalità [4.1] (lo diventa solo nel caso particolare in cui le matrici del sistema sono matrici diagonali composte da elementi identici).

L'utilizzo proposto per il MAC nella funzione obiettivo è coerente con la definizione originaria, in quanto il criterio è utilizzato per stimare l'errore tra un dato autovettore misurato e la sua controparte analitica. Da un punto di vista geometrico, è una stima di coerenza tra i due vettori, indipendente dallo scalamento e che rappresenta una misura quadratica del coseno compreso tra i due se pensati appartenenti allo spazio delle n -uple (il che giustifica la presenza della radice); si tratta, pertanto, di una descrizione dell'errore coerente con la definizione di modo di vibrare. In [4.9], con riferimento a problemi deterministici, è proposta la:

$$\frac{\left(1 - \sqrt{\text{MAC}({}^K\phi_i, {}^K\tilde{\phi}_i)}\right)^2}{\text{MAC}({}^K\phi_i, {}^K\tilde{\phi}_i)} \quad (4.7)$$

che è certamente un'espressione egualmente valida; la (4.6) è stata qui preferita per simmetria rispetto alla (4.5). Altri metodi di letteratura, come ad esempio quello utilizzato in [4.22], basati sul confronto diretto delle componenti modali, appaiono invece poco idonei, visto che ignorano la natura vettoriale degli enti in gioco.

L'ultima questione da redimere è come preservare il carattere stocastico del problema nella formulazione della funzione obiettivo: in questa sede la scelta è ricaduta sull'esprimere l'autosoluzione con riferimento a un certo frattile. Si tratta di un metodo semplice e intuitivo per tenere conto dell'incertezza, comunemente adoperato nell'ambito del problema diretto e già utilizzato in altri problemi di minimizzazione [4.3]. Per quanto riguarda la scelta del frattile, il calcolo potrebbe non essere così immediato: come si è già ampiamente discusso nell'ambito diretto, anche se il problema agli autovalori è funzione di sole variabili gaussiane, in genere l'autosoluzione non lo è. Una soluzione semplice alla questione può però trovarsi tramite una definizione alternativa del frattile; se pensato come un limite superiore della risposta [4.3], allora si può porre semplicemente:

$$\begin{cases} {}^K\lambda_i &= \mu_{\lambda_i} + 3\sigma_{\lambda_i} \\ {}^K\phi_i &= \mu_{\phi_i} + 3\sigma_{\phi_i} \end{cases} \quad (4.8)$$

(e analoghe per le quantità misurate) ove la scelta del valore 3 discende dal valore del coefficiente c tale che, se x è una variabile gaussiana di media μ_x e deviazione standard σ_x , allora:

$${}^Kx = \mu_x + c\sigma_x \quad (4.9)$$

ha una probabilità di non superamento pari al 99.9 % circa.

4.2.2 Utilizzi della procedura

La procedura può essere utilizzata per i due scopi descritti al § 4.1, ossia come tecnica di model updating stocastico, nel caso di una singola campagna di prove, o ai fini dell'identificazione stocastica di modifiche strutturali, nel caso di due o più misure sperimentali. La formulazione è sostanzialmente la stessa, ma il significato delle grandezze in gioco e dei parametri incerti valutati è differente.

Per effettuare il *model updating stocastico* del modello si inizializzano le matrici $\mathbf{M}_0$ e $\mathbf{K}_0$ e si risolve l'equazione generatrice corrispondente, allo scopo di valutare l'autosoluzione λ_{0i} e ϕ_{0i} . Nel paragrafo precedente si è detto però che tutte le quantità perturbative ($\lambda_{0i}, \lambda_{1ik}, \lambda_{2ikl}$) e ($\phi_{0i}, \phi_{1ik}, \phi_{2ikl}$) sono da intendersi note, vale a dire, che anche la dipendenza parametrica della struttura deve essere nota. Il problema è comune ad altre tecniche di letteratura [4.4], e viene in genere affrontato estendendo la funzione obiettivo in modo che essa sia in grado di contemplare la presenza di più possibili

ipotesi parametriche:

$$\mathcal{E}(\mu_{\theta_k}, \sigma_{\theta_k}, \mathcal{M}_h) = \mathcal{E}(\mu_{\theta_k}, \sigma_{\theta_k})|_{\mathcal{M}_h} \quad (4.10)$$

dove $\mathcal{M}_h$ rappresenta la classe di *modelli candidati*, a ognuno dei quali corrispondono, per tramite delle relazioni algebriche (3.34) e (3.61), differenti termini $(\lambda_{1ik}, \lambda_{2ikl})$ e $(\phi_{1ik}, \phi_{2ikl})$. Conseguentemente, la procedura d'identificazione richiede la ricerca del minimo globale:

$$(\tilde{\mu}_{\theta_k}, \tilde{\sigma}_{\theta_k}, \tilde{\mathcal{M}}_h) = \arg \min \mathcal{E}(\mu_{\theta_k}, \sigma_{\theta_k}, \mathcal{M}_h) \quad \sigma_{\theta_k} \geq 0 \quad + \text{altri vincoli} \quad (4.11)$$

ossia del modello $\tilde{\mathcal{M}}_h$ e delle coppie $(\tilde{\mu}_{\theta_k}, \tilde{\sigma}_{\theta_k})$ che minimizzano la funzione obiettivo. Tanto l'onere computazionale, quanto la bontà della soluzione, sono direttamente correlati a una scelta appropriata delle matrici di partenza $\mathbf{M}_0$ e $\mathbf{K}_0$ e della classe dei modelli selezionati $\mathcal{M}_h$; in genere, le specificità fisiche del problema strutturale analizzato permettono di inizializzare in maniera *sufficientemente* approssimata le matrici $\mathbf{M}_0$ e $\mathbf{K}_0$ e riducono i modelli candidabili nella classe $\mathcal{M}_h$ a un numero ridotto.

Per l'utilizzo della procedura come *identificazione stocastica di modifiche strutturali* le matrici $\mathbf{M}_0$ e $\mathbf{K}_0$ con le quali risolvere l'equazione generatrice e quindi valutare l'autosoluzione λ_{0i} e ϕ_{0i} si ottengono dal precedente step di model updating stocastico; ricordando che al secondo ordine la dipendenza funzionale delle matrici del sistema dai parametri si scrive:

$$\begin{cases} \mathbf{M}(\theta) = \mathbf{M}_0 + \sum_{k=1}^m \mathbf{M}_{1k} \theta_k + \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m \theta_k \theta_l \mathbf{M}_{2kl} \\ \mathbf{K}(\theta) = \mathbf{K}_0 + \sum_{k=1}^m \mathbf{K}_{1k} \theta_k + \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m \theta_k \theta_l \mathbf{K}_{2kl} \end{cases} \quad (4.12)$$

mediando queste equazioni (con dimostrazione formalmente analoga a quella del § 3.7.2) si possono ottenere le matrici $\mathbf{M}_0$ e $\mathbf{K}_0$ aggiornate:

$$\begin{cases} \mathbf{M}_0 = \left(\mathbf{M}_0 + \sum_{k=1}^m \mu_{\theta_k} \mathbf{M}_{1k} + \sum_{k=1}^m \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^m \mu_{\theta_k} \mu_{\theta_l} \mathbf{M}_{2kl} + \sum_{k=1}^m (\mu_{\theta_k}^2 + \sigma_{\theta_k}^2) \mathbf{M}_{2kk} \right) \Big|_{MU} \\ \mathbf{K}_0 = \left(\mathbf{K}_0 + \sum_{k=1}^m \mu_{\theta_k} \mathbf{K}_{1k} + \sum_{k=1}^m \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^m \mu_{\theta_k} \mu_{\theta_l} \mathbf{K}_{2kl} + \sum_{k=1}^m (\mu_{\theta_k}^2 + \sigma_{\theta_k}^2) \mathbf{K}_{2kk} \right) \Big|_{MU} \end{cases} \quad (4.13)$$

ove MU indica che le quantità a secondo membro sono quelle valutate nella procedura di model updating. Il resto della procedura è esattamente identico al caso precedente: si sceglie la classe $\mathcal{M}_h$ di modelli candidati, a ognuno dei quali corrispondono differenti termini $(\lambda_{1ik}, \lambda_{2ikl})$ e $(\phi_{1ik}, \phi_{2ikl})$, e si utilizza la (4.11) per identificare il modello $\tilde{\mathcal{M}}_h$ e le coppie $(\tilde{\mu}_{\theta_k}, \tilde{\sigma}_{\theta_k})$. Anche in questo caso l'onere computazionale e la bontà della soluzione sono correlati alla classe dei modelli selezionati $\mathcal{M}_h$.

Se si dispone di ulteriori misure sperimentali successive, la procedura di identificazione stocastica delle modifiche strutturali appena descritta può essere ripetuta (le matrici $\mathbf{M}_0$ e $\mathbf{K}_0$ verranno aggiornate per tramite della (4.13), sostituendo a MU l'ultimo risultato disponibile), prefigurando un *continuous model updating*.

Sintetizzando, sia che si tratti di model updating stocastico che di identificazione stocastica di modifiche strutturali o continuous model updating, la procedura d'identificazione proposta, appartenente alla classe dei metodi ai minimi quadrati, consiste nei seguenti tre step:

- effettuare le prove dinamiche e stimare le medie e le varianze sperimentali dell'autosoluzione;
- valutare le quantità (deterministiche) perturbative per i vari modelli candidati;
- implementare la funzione obiettivo e stimare i parametri incerti.

In Figura 4.1 la procedura è sintetizzata sotto la forma di diagramma di flusso; l'utilizzo della simbologia standard di tale tipo di diagrammi permette anche di enfatizzare come le scelte soggettive da effettuare siano l'inizializzazione delle matrici $\mathbf{M}_0$ e $\mathbf{K}_0$, per il solo caso di model updating stocastico, e la scelta dei modelli candidati, in tutti i casi d'identificazione stocastica (cfr. parallelogrammi di figura).

4.2.3 Scelta dei modelli

Per il caso di model updating stocastico un'ipotesi ragionevole di lavoro comunemente adottata è inizializzare le matrici di massa e rigidezza $\mathbf{M}_0$ e $\mathbf{K}_0$ (sulla base di dati progettuali o di altre indagini diagnostiche) e poi scegliere come modelli candidati $\mathcal{M}_h$ uno o più modelli che agiscono sulla sola rigidezza del sistema, nella sua interezza o per sottosistemi.

Nel caso di identificazione stocastica di modifiche strutturali o di continuous model updating, le matrici $\mathbf{M}_0$ e $\mathbf{K}_0$ vanno solamente aggiornate e non più inizializzate. Tuttavia, resta il problema della scelta dei modelli candidati $\mathcal{M}_h$: anche in questo caso la questione può essere approcciata in maniera semplificata, partendo dal significato fisico dei parametri. Vale la pena analizzare nel dettaglio le modifiche strutturali possibili; siccome, come si è già più volte sottolineato, la formulazione è pensata per un sistema dinamico privo di smorzamento, il ventaglio di possibilità è ridotto all'analisi di alterazioni della massa piuttosto che della rigidezza strutturale:

- variazione della massa: si presenta principalmente quando uno o più parti della struttura subiscono una variazione d'uso o quando si esegue un intervento di

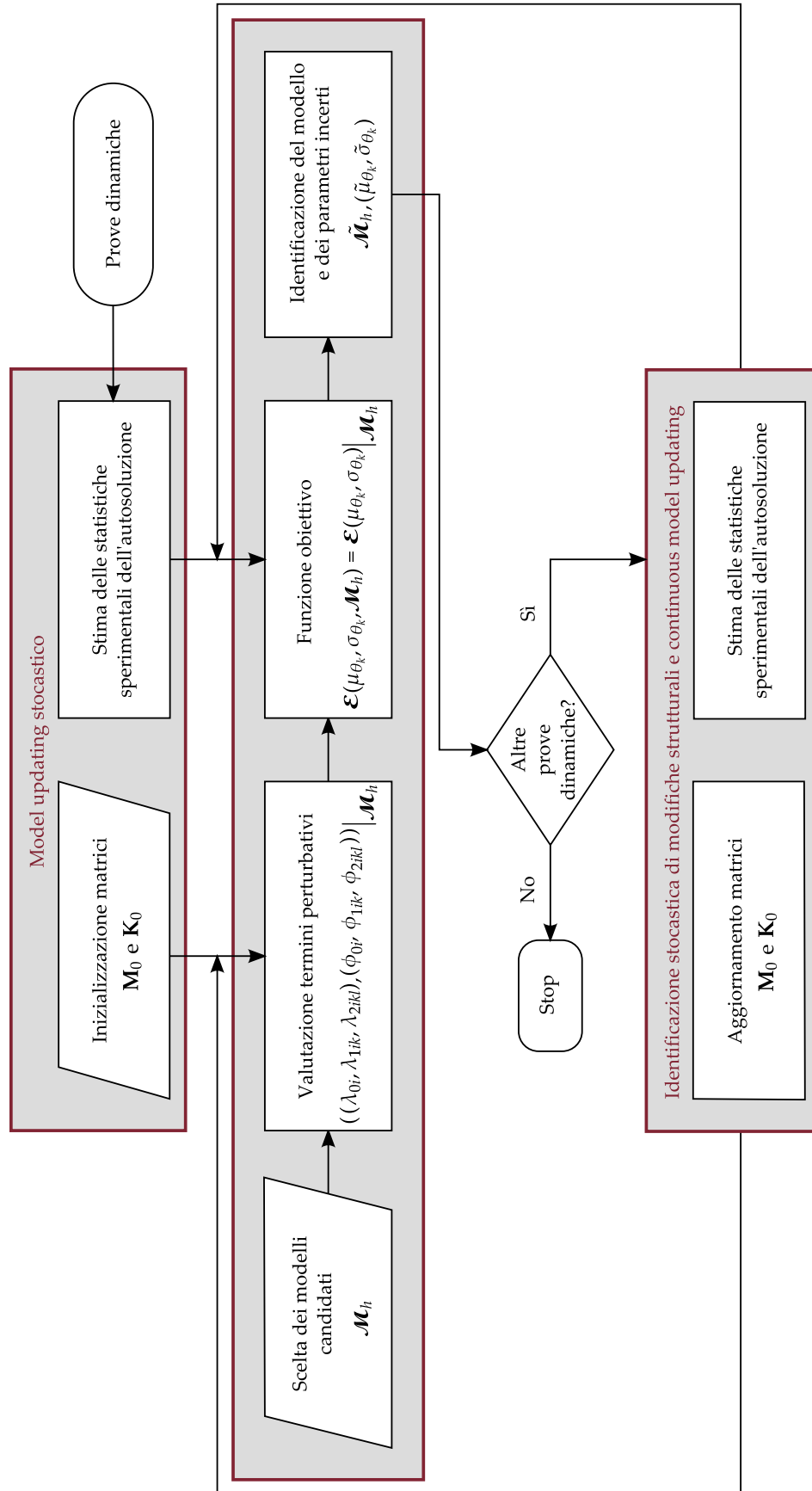


Figura 4.1: Diagramma di flusso del metodo di soluzione del problema inverso.

rinforzo strutturale (sono infatti da ritenere trascurabili le variazioni di massa per degrado e/o danneggiamento);

- incremento della rigidità: si verifica in presenza di un intervento di rinforzo strutturale;
- riduzione della rigidità: si presenta quando la struttura è affetta da un danneggiamento, visibile oppure meno.

Nei primi due casi, di variazione della massa e/o di incremento della rigidità, la dipendenza del modello dai parametri fisici rappresentativi delle modifiche strutturali può certamente considerarsi nota a priori, e quindi, a patto di attribuire tutta l'incertezza proprio a detti parametri, la classe dei modelli candidati è riconducibile a un unico modello.

La tesi mira però all'identificazione dinamica di parametri incerti di danno, indubbiamente il caso più interessante da un punto di vista ingegneristico. Siccome, in generale, il danneggiamento di una struttura non è visibile (perché il danno non è macroscopico o perché la zona non è accessibile), le soluzioni possibili sono soltanto due: utilizzare effettivamente più modelli candidati oppure localizzare il danneggiamento (adoperando a monte una qualche tecnica ad hoc) e, attribuendo a tale parametro tutta l'incertezza, selezionare un unico modello. L'argomento verrà discusso nel paragrafo successivo, unitamente alle condizioni di univocità della soluzione.

4.2.4 Strategia risolutiva nel caso di danneggiamento

L'univocità della soluzione è, chiaramente, un quesito centrale nell'ambito delle procedure inverse. Sulla base delle caratteristiche della funzione obiettivo un sistema può essere classificato come [4.4]:

- globalmente identificabile: se esiste un minimo globale;
- localmente identificabile: se esistono più minimi globali;
- non identificabile: se esistono infiniti minimi globali.

Affinché un sistema sia globalmente identificabile non è sufficiente garantire che le matrici di massa e rigidità $\mathbf{M}_0$ e $\mathbf{K}_0$ siano opportunamente inizializzate e che i modelli candidati $\mathbf{M}_i$ siano convenientemente scelti, in quanto l'univocità della soluzione dipende fortemente dal numero di frequenze e modi di vibrazione misurati.

Con particolare riferimento al caso di danno, in letteratura sono disponibili importanti risultati sul numero minimo di frequenze da acquisire per l'identificazione

deterministica della posizione e dell'entità di un danneggiamento. Gli studi sono rivolti a diversi elementi strutturali notevoli, tra questi, la trave e l'asta rettilinee [4.23, 16], il cavo sospeso [4.11] e l'arco parabolico [4.21]. Nozioni di carattere più generale, comprensive delle informazioni probabilistiche e riferite sia alle frequenze, sia ai modi di vibrare, sono disponibili, ad esempio, in [4.17]; un risultato di validità generale, robusto anche in presenza di rumore, è comunque difficile da ottenere.

Per i parametri incerti di danno si erano pronosticate due possibili soluzioni: utilizzare effettivamente più modelli candidati oppure localizzare il danno e selezionare un unico modello. Alla luce delle difficoltà appena esposte, è preferibile seguire la seconda filosofia, che permette di ricondurre il problema dell'identificazione del danno alla sola stima della sua entità; peraltro, l'utilizzo di un unico modello ha anche evidenti implicazioni in termini di risparmio computazionale. Il problema della localizzazione preliminare del danneggiamento verrà ampiamente discusso nella terza parte della tesi.

4.2.5 Probabilità di danneggiamento

Nei casi di identificazione stocastica di modifiche strutturali e di continuous model updating si possono avere per lo stesso parametro incerto più distribuzioni, vale a dire, più coppie $(\tilde{\mu}_{\theta_k}, \tilde{\sigma}_{\theta_k})$, relative a step diversi; ha quindi interesse chiedersi qual è la probabilità che il nuovo parametro incerto sia minore (o maggiore) del vecchio.

Il quesito può risolversi in forma semplice sfruttando l'ipotesi di parametri incerti distribuiti normalmente e ammettendo che le misure siano indipendenti. Detta x una variabile gaussiana di media μ_x e varianza σ_x^2 , e detta y una seconda variabile gaussiana di media μ_y e varianza σ_y^2 , la probabilità che x sia minore (o maggiore) di y si può scrivere:

$$\begin{cases} P(x < y) = P(x - y < 0) = P(z < 0) & P(x > y) = P(x - y > 0) = P(z > 0) \\ z = \mathcal{N}(\mu_z, \sigma_z^2) & \mu_z = \mu_x - \mu_y, \sigma_z^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2 \end{cases} \quad (4.14)$$

avendo sfruttato le relazioni valide per una variabile aleatoria trasformazione lineare di più variabili gaussiane indipendenti, cfr. Appendice B; il metodo è illustrato in forma grafica Figura 4.2.

La probabilità che una variabile gaussiana sia minore o maggiore di zero è poi pari a:

$$P(z < 0) = \frac{1}{2} \left(1 + \operatorname{erf} \left(\frac{-\mu_z}{\sqrt{2}\sigma_z} \right) \right) \quad P(z > 0) = 1 - \frac{1}{2} \left(1 + \operatorname{erf} \left(\frac{-\mu_z}{\sqrt{2}\sigma_z} \right) \right) \quad (4.15)$$

essendo $\operatorname{erf}(z)$ la *funzione degli errori* o *funzione degli errori di Gauss*. Sostituendo a x e y la nuova e una precedente stima del parametro θ_k , l'applicazione della (4.14) e della (4.15) fornisce le probabilità cercate.

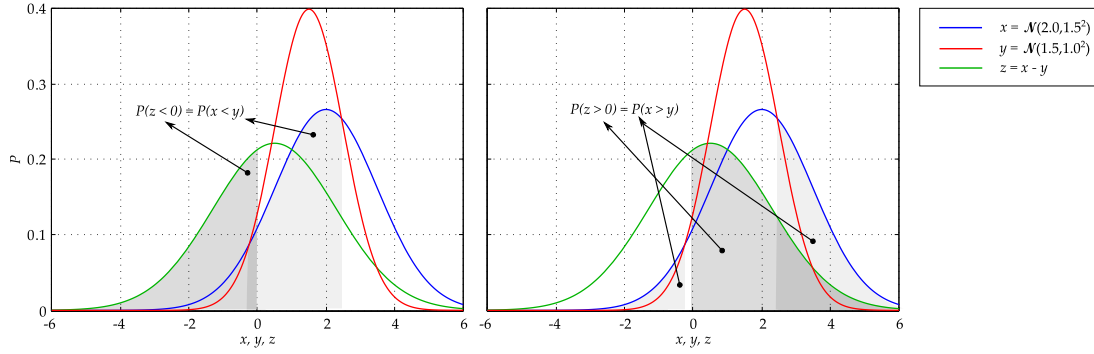


Figura 4.2: Calcolo della probabilità $P(x < y)$ e $P(x > y)$ tramite variabile ausiliaria z .

Il caso di maggiore interesse è la valutazione della *probabilità di danneggiamento*, intesa come riduzione della rigidezza; in generale, tale probabilità dipende non solo dalla variazione di media e varianza del parametro di danno, ma anche dal legame tra la rigidezza e il parametro di danno (e.g., se il parametro di danno scelto è l'altezza di una trave, la rigidezza dell'elemento dipenderà in maniera cubica dal parametro), e quindi la soluzione è da ricercare seguendo la strategia già utilizzata nel § 3.7.4.

Nel caso notevole in cui il parametro coincide con la riduzione di rigidezza:

$$K = \bar{K} (1 - \theta_k) \quad (4.16)$$

la probabilità di danneggiamento è valutabile in maniera immediata. Se $\tilde{\theta}_{k|J}$ è l'ultima stima del parametro e $\tilde{\theta}_{k|MU}$ la stima ottenuta dal model updating stocastico, è sufficiente, infatti, applicare la (4.15)₂ con μ_z e σ_z pari a:

$$\mu_z = \bar{K} (\mu_{\tilde{\theta}_{k|J}} - \mu_{\tilde{\theta}_{k|MU}}) \quad \sigma_z^2 = \bar{K}^2 (\sigma_{\tilde{\theta}_{k|J}}^2 + \sigma_{\tilde{\theta}_{k|MU}}^2) \quad (4.17)$$

avendo nuovamente sfruttato le relazioni valide per una variabile aleatoria trasformazione lineare di variabili gaussiane indipendenti, Appendice B.

4.2.6 Ricerca del minimo globale

La ricerca dei punti estremali di una funzione è un tema molto battuto nella letteratura matematica; solitamente si parla di *ottimizzazione* o di *programmazione matematica*.

Il caso più noto, oltre che agevole, è quello della programmazione convessa, relativo ai problemi di minimo di una funzione convessa con insieme ammissibile anch'esso convesso. Per tale tipo di problemi ogni punto di minimo locale è anche punto di minimo globale e l'insieme dei punti di minimo globale è un insieme convesso; tale insieme degenera poi in un unico punto se la funzione è strettamente convessa. Riconoscere

che un problema di ottimizzazione è convesso fornisce quindi importanti informazioni qualitative sulle sue soluzioni.

Nel caso in analisi, si può dimostrare che la funzione obiettivo che si intende minimizzare non è convessa; allo scopo è sufficiente il seguente semplice controesempio. Si consideri il singolo termine analitico della (4.2):

$$\left(1 - \frac{\lambda_{0i} + \mu_{\theta}\lambda_{1i} + \mu_{\theta}^2\lambda_{2i}}{K\tilde{\lambda}_i}\right)^2 \quad (4.18)$$

relativo a un singolo autovalore con dipendenza mono-parametrica, sotto l'ipotesi di calcolo deterministico; essendo questa funzione di μ_{θ} non convessa, tale sarà, in generale, anche la funzione obiettivo.

L'aver riconosciuto che il problema oggetto di studio non appartiene all'ambito della programmazione convessa, implica la necessità di utilizzare un metodo di ricerca del minimo globale basato su una tecnica di ottimizzazione globale, si veda, ad esempio, [4.15]. Il successo di questo tipo di tecniche è fortemente legato sia alla scelta della soluzione di partenza sia alla forma della funzione da minimizzare (si pensi alla classica funzione test della *valle* di Rosenbrock). Per questo motivo, nella tesi si è preferito allo stato attuale effettuare una ricerca esplicita del minimo globale, studiando i valori della funzione obiettivo all'interno del dominio d'interesse dei parametri (ovvero il dominio ristretto in modo da preservare il significato fisico dei parametri stessi); chiaramente, come possibile prospettiva futura potrebbe essere utile implementare un'idonea tecnica di programmazione matematica.

4.2.7 Confronto con altri filoni di ricerca

Tra gli approcci che sfruttano la metodologia perturbativa per risolvere i problemi inversi, [4.19] è un primo riferimento storico. Nel lavoro si confrontano l'autosoluzione sperimentale e quella stimata per via analitica per determinare, da un punto di vista geometrico (nel senso dell'algebra lineare), dove modificare le matrici di massa e rigidità per ridurre la discrepanza tra il modello fisico e i dati raccolti; in altre parole, l'approccio, sviluppato in ambito deterministico, fornisce informazioni di tipo qualitativo. Naturalmente, con riferimento sempre al caso deterministico, le potenzialità del metodo perturbativo si esaltano nel caso di identificazione di sistemi non lineari, anche se in genere è necessario utilizzare ipotesi semplificative, come il limitarsi all'identificazione di modelli SDoF [4.6]. Questo giustifica l'utilizzo di un modello fisico i cui parametri possono subire un'evoluzione nel tempo, ma che continua a esibire un comportamento linearmente approssimabile.

Un importante filone di ricerca è quello basato sulla perturbazione al primo ordine della matrice di rigidezza e sullo studio delle sole frequenze, allo scopo di ottenere una matrice di sensibilità del sistema con la quale aggiornare la matrice di rigidezza sulla base delle differenze tra l'autosoluzione analitica e quella sperimentale [4.7]. Tale tipo di approccio, ideato per il caso deterministico, è stato poi esteso al caso stocastico, perturbando nuovamente, fino al primo o al secondo ordine, la matrice di sensibilità; il metodo è stato ampiamente usato sia come tecnica di model updating [4.8], sia per l'identificazione del danno [4.20, 24]. La differenza tra il metodo proposto e tale filone di ricerca è, non solo che in questa sede è possibile contemplare anche le informazioni sperimentali raccolte per i modi di vibrare, ma, e soprattutto, che l'approccio perturbativo è qui sfruttato appieno: mentre nei lavori citati la matrice di sensibilità deve essere in genere aggiornata, per ottenere una soluzione affidabile, qui è l'autosoluzione analitica stessa che può essere valutata con termini di ordine elevato quanto si vuole (e valutabili per tramite di semplici relazioni algebriche), senza inficiare la struttura routinaria del metodo.

Una proposta di letteratura basata su tecniche bayesiane è il codice agli FE lineari *IDEFEM*, si veda, ad esempio, [4.17]. Un'importante sezione del codice è dedicata proprio alla costruzione del modello stocastico agli FE, le cui caratteristiche vengono poi aggiornate sulla base delle statistiche sperimentali dell'autosoluzione per mezzo di un estimatore bayesiano. Una prima differenza che si può evidenziare rispetto al codice *IDEFEM* è che la distribuzione dei parametri è stata in questa sede fissata a priori; sfruttando il concetto di trasformazione iso-probabilistica è stato imposto, infatti, un set di parametri gaussiani e indipendenti tra loro (si veda il concetto di spazio standard di cui al paragrafo § 3.2).

La seconda e più importante differenza concerne la strategia risolutiva utilizzata. Rispetto al codice *IDEFEM* l'approccio perturbativo qui sviluppato ha il vantaggio di potersi *muovere* nell'intorno dell'unico problema agli autovalori posto dall'equazione generatrice. D'altro canto, questo potrebbe comportare a un palese contro: mentre la convergenza del codice *IDEFEM* è, sotto l'ipotesi di problema ben posto, legata al solo infittimento della mesh, con l'approccio perturbativo qui sviluppato (indipendentemente dall'ordine raggiunto) vi è una richiesta aggiuntiva, ovvero che la soluzione cercata giaccia all'interno del raggio di convergenza della soluzione dell'equazione generatrice. Si tratta, in effetti, di uno svantaggio comune a tutte le tecniche perturbative, per il quale non esiste rimedio; se l'ipotesi di partenza di *piccole perturbazioni* utilizzata nell'impostare la formulazione qui presentata non è attendibile, bisogna ricorrere a un approccio differente.

4.3 Considerazioni sintetiche

Nel capitolo precedente si sono ricavate le soluzioni al primo ordine di un problema agli autovalori relativo a un sistema dinamico lineare discreto a più gradi di libertà con dipendenza mono-parametrica. Sempre nell'ambito del problema diretto, si sono poi estese le relazioni ottenute al caso multi-parametrico e si sono studiate le medie e le varianze degli autovalori e degli autovettori sotto l'ipotesi di parametri incerti con distribuzione gaussiana e indipendenti tra loro. Lo stesso iter procedurale è stato eseguito nuovamente per tenere conto dei termini del secondo ordine. Si è mostrato come l'ipotesi di distribuzione gaussiana dei parametri incerti non influenzi la natura delle medie stocastiche dell'autosoluzione al primo ordine, ma solo quelle al secondo ordine. Come applicazione del problema diretto si è studiata la sensibilità dell'autosoluzione di un telaio shear type a 4 gradi di libertà con un danneggiamento di entità incerta, mostrando i benefici legati ai termini quadratici dell'approccio.

Sfruttando questi risultati, nel presente capitolo si è formulato il corrispondente problema inverso, ovvero l'identificazione di strutture dinamiche lineari discrete a parametri incerti con distribuzione gaussiana e indipendenti tra loro. Il metodo d'identificazione proposto si basa sulla minimizzazione di una funzione obiettivo che valuta le medie e le varianze dei parametri a partire dalle medie stocastiche di autovalori e autovettori; sostanzialmente, si confrontano le statistiche misurate con quelle analitiche fornite dalle relazioni ricavate nel capitolo precedente. Il vantaggio del metodo è una costruzione della funzione obiettivo computazionalmente semplice, poiché in grado di sfruttare tutti i vantaggi dell'approccio perturbativo, anche nel caso in cui la dipendenza della struttura dai parametri non sia nota a priori; la metodologia può pensarsi di carattere generale, in quanto indipendente dall'ordine di approssimazione raggiunto nella perturbazione.

Le applicazioni cui il metodo è destinato sono sia il model updating stocastico, sia l'identificazione stocastica di modifiche strutturali e il continuous model updating. Per il caso di maggiore interesse, l'identificazione di parametri incerti di danno, si è visto che è conveniente utilizzare preliminarmente una tecnica di localizzazione del danneggiamento; l'argomento è discusso nella terza parte della tesi. Per un'applicazione della tecnica d'identificazione si rimanda al § 6.3.5, nel quale il metodo proposto è applicato per l'identificazione del danno nel telaio shear type di cui si era in precedenza studiato il problema diretto.



Bibliografia

- [4.1] R. J. Allemang. “The Modal Assurance Criterion (MAC): twenty years of use and abuse”. *Sound and Vibration Magazine*, 37(8):14–23, 2003.
- [4.2] R. J. Allemang e D. L. Brown. “A correlation coefficient for modal vector analysis”. *1st International Modal Analysis Conference, IMAC*, 1982.
- [4.3] D. W. Apley, J. Liu, e W. Chen. “Understanding the effects of model uncertainty in robust design with computer experiments”. *Journal of Mechanical Design*, 128(1):946–958, 2006.
- [4.4] J. L. Beck e L. S. Katafygiotis. “Probabilistic system identification and health monitoring of structures”. *10th Earthquake Engineering, WCEE*, 1992.
- [4.5] Z. F. Fu e J. He. “Modal analysis”. *Elsevier Science*, 1^a edizione, 2001.
- [4.6] M. R. Hajj, J. Fung, A. H. Nayfeh, e S. O’F. Fahey. “Damping identification using perturbation techniques and higher-order spectra”. *Nonlinear Dynamics*, 23(2):189–203, 2000.
- [4.7] S. Hassiotis e G. D. Jeong. “Identification of stiffness reductions using natural frequencies”. *Journal of Engineering Mechanics*, 121(10):1106–1113, 1995.
- [4.8] H. H. Khodaparast, J. E. Mottershead, e M. I. Friswell. “Perturbation methods for the estimation of parameter variability in stochastic model updating”. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 22(8):1751–1773, 2008.
- [4.9] M. Kurata, J. Kim, J. P. Lynch, K. H. Law, e L. W. Salvino. “A probabilistic model updating algorithm for fatigue damage detection in aluminum hull structures”. *ASME 2010 Conference on Smart Materials, Adaptive Structures and Intelligent Systems, SMASIS*, 2010.
- [4.10] Y. Lei, Y. Su, e W. Shen. “A probabilistic damage identification approach for structures under unknown excitation and with measurement uncertainties”. *Journal of Applied Mathematics*, 2013(1):1–8, 2013.
- [4.11] M. Lepidi, V. Gattulli, e F. Vestroni. “Damage identification in elastic suspended cables through frequency measurement”. *Journal of Vibration and Control*, 15(6):867–896, 2009.
- [4.12] J. Li e J. B. Roberts. “Stochastic structural system identification. Part 1: Mean parameter estimation”. *Computational Mechanics*, 24(3):206–210, 1999.

-
- [4.13] J. Li e J. B. Roberts. "Stochastic structural system identification. Part 2: Variance parameter estimation". *Computational Mechanics*, 24(3):211–215, 1999.
- [4.14] L. Meirovitch e M. A. Norris. "A perturbation technique for parameter identification in distributed structures". *Applied Mathematical Modelling*, 12(2):167–174, 1988.
- [4.15] R. E. Miller. "Optimization: foundations and applications". John Wiley & Sons, 1^a edizione, 2000.
- [4.16] A. Morassi. "Identification of a crack in a rod based on changes in a pair of natural frequencies". *Journal of Sound and Vibration*, 242(4):577–596, 2001.
- [4.17] A. Morassi e F. Vestroni. "Dynamic methods for damage detection in structures", volume 499 di CISM International Centre for Mechanical Sciences. SpringerWienNewYork, 1^a edizione, 2008.
- [4.18] J. E. Mottershead e M. I. Friswell. "Model updating in structural dynamics: a survey". *Journal of Sound and Vibration*, 167(2):347–375, 2008.
- [4.19] I. U. Ojalvo e D. Pilon. "Diagnostics for geometrically locating structural math model errors from modal test data". 29th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics & Materials Conference, 1988.
- [4.20] L. Papadopoulos e E. Garcia. "Structural damage identification: a probabilistic approach". *AIAA Journal*, 36(11):2137–2145, 1998.
- [4.21] A. Pau, A. Greco, e F. Vestroni. "Numerical and experimental detection of concentrated damage in a parabolic arch by measured frequency variations". *Journal of Vibration and Control*, 17(4):605–614, 2011.
- [4.22] L. F. Ramos, G. De Roeck, P. B. Lourenço, e A. Campos-Costa. "Damage identification on arched masonry structures using ambient and random impact vibrations". *Engineering Structures*, 32(1):146–162, 2010.
- [4.23] F. Vestroni e D. Capecchi. "Damage evaluation in cracked vibrating beams using experimental frequencies and finite element models". *Journal of Vibration and Control*, 2(1):69–86, 1996.
- [4.24] Y. Xia e H. Hao. "Statistical damage identification of structures with frequency changes". *Journal of Sound and Vibration*, 263(4):853–870, 2003.

Pagina lasciata intenzionalmente bianca.

Parte 3: Una proposta d'identificazione del danno basata sull'empirical mode decomposition

Pagina lasciata intenzionalmente bianca.

Capitolo 5

Empirical Mode Decomposition

5

Nell'applicare la procedura d'identificazione probabilistica al caso di parametri incerti di danno, sono emerse alcune difficoltà operative, che hanno suggerito di implementare per questi casi un'analisi preliminare per la stima della posizione del danneggiamento.

Il metodo proposto, presentato nel capitolo successivo, è imperniato sulla tecnica **EMD** (*Empirical Mode Decomposition*) e punta a combinare le potenzialità complementari dei metodi dinamici d'identificazione del danno basati sulle proprietà fisiche o modali della struttura e quelli fondati sulle caratteristiche di elaborazione dei segnali.

Nel presente capitolo si intende scegliere e implementare una versione dell'EMD utile per le applicazioni strutturali (le pubblicazioni sul tema sono quasi 9000, anche se la maggior parte dedicate all'analisi del segnale, piuttosto che all'identificazione), oltre che confrontare il metodo con la trasformata di Fourier e quella Wavelet, cercando di enfatizzare pregi e difetti di questi strumenti.

5.1 Formulazione dell'EMD

L'EMD è una tecnica d'analisi del segnale sviluppata a cavallo degli anni 2000. Dalla sua apparizione ha suscitato grande interesse nella comunità scientifica, inserendosi fra le tecniche d'analisi tempo-frequenza più innovative e promettenti. Le principali caratteristiche sono sia la possibilità di operare su risposte non-lineari e non-stazionarie

sia la semplicità d'impiego. Tali proprietà ne hanno fatto diffondere l'uso in molti ambiti dell'ingegneria delle strutture, che spaziano dall'ingegneria sismica all'identificazione strutturale dinamica.

Il concetto fondamentale da discutere è il dominio di localizzazione della base su cui si proietta il segnale da analizzare. La trasformata di Fourier, alla base delle tecniche d'identificazione nel dominio delle frequenze, è localizzata perfettamente nel dominio delle frequenze, ma non è localizzata nel tempo. Le analisi tempo-frequenza sono, invece, localizzate sia nel dominio delle frequenze, sia in quello del tempo e per questo motivo permettono lo studio di risposte modulate in ampiezza (non-stazionarie) e/o in frequenza (non lineari).

Esistono molteplici metodi progettati per modificare la rappresentazione *globale* fornita dall'analisi di Fourier; tra questi, un'analisi tempo-frequenza che si è dimostrata fruttuosa anche per l'identificazione strutturale è la trasformata Wavelet. La tecnica qui presentata, l'EMD, viene detta decomposizione modale empirica perché fondata su una procedura operativa che non ha una diretta corrispondenza con il modello dinamico parametrico modale.

Nello specifico, la tecnica nota come EMD si fonda sulla seguente decomposizione:

$$y(t) = \sum_{i=1}^n g_i(t) + r_n(t) \quad (5.1)$$

con $y(t)$ il segnale di partenza, $g_i(t)$ l' i -esimo **IMF** (*Intrinsic Mode Functions*), definito come una funzione che soddisfa le due seguenti condizioni [5.7]:

- nell'intero insieme di dati, il numero dei valori estremali e il numero di attraversamenti per lo zero devono essere uguali o al più differire di uno;
- in ogni punto, il valore medio degli involucri massimi e minimi è pari a zero;

e $r_n(t)$ il residuo finale.

Nella versione discreta, la relazione (5.1) si scrive analogamente come:

$$y(t_k) = \sum_{i=1}^n g_i(t_k) + r_n(t_k) \quad (5.2)$$

ovvero, in forma più compatta:

$$y_k = \sum_{i=1}^n g_{ik} + r_{nk} \quad y_k = y(t_k) \quad g_{ik} = g_i(t_k) \quad r_{nk} = r_n(t_k) \quad k = 1, \dots, N \quad (5.3)$$

Il lavoro originale sul tema [5.7] è molto dettagliato (il documento sfiora le 100 pagine); ulteriori dettagli sono rintracciabili in [5.6]. Per i fini del presente documento è sufficiente richiamare soltanto i concetti basilari della tecnica.

La procedura adottata per stimare i modi IMF è nota come processo di *sifting* (cernita) e può sintetizzarsi nei seguenti punti (per motivi di brevità esposti con riferimento al caso continuo, ma di facile estensione al caso discreto):

- valutare i punti estremali locali del segnale in ingresso $y(t)$ che si desidera scomporre;
- interpolare i minimi (massimi) locali tracciando un inviluppo inferiore (superiore) del segnale $e_{l1}^{(0)}(t)$ ($e_{u1}^{(0)}(t)$);
- calcolare la media dei due inviluppi $m_1^{(0)}(t) = (e_{l1}^{(0)}(t) + e_{u1}^{(0)}(t))/2$;
- trovare una stima del primo IMF come differenza tra il segnale in ingresso e la media dei due inviluppi $g_1^{(0)}(t) = y(t) - m_1^{(0)}(t)$;
- ripetere i punti precedenti assumendo $g_1^{(0)}(t)$ come segnale in ingresso e aggiornando l'ordine di iterazione da (0) a (1);
- detto K il numero di iterazioni necessarie al raggiungimento di una prefissata condizione di stop locale, valutare il primo IMF come $g_1(t) = g_1^{(K)}(t)$;
- calcolare il primo residuo $r_1(t) = y(t) - g_1(t)$;
- ripetere la procedura precedente considerando $r_1(t)$ come segnale in ingresso e valutando il secondo IMF $g_2(t)$, e così via (la procedura si ripete iterativamente considerando $r_i(t)$ come segnale in ingresso e valutando il successivo IMF $g_{i+1}(t)$);
- raggiunta una condizione di stop finale si ammette come decomposizione del segnale la $y(t) = \sum_{i=1}^n g_i(t) + r_n(t)$, con un numero complessivo di n IMF $g_i(t)$ e un residuo finale $r_n(t)$.

Sintetizzando, il metodo d'analisi consta dei seguenti step:

- tramite una procedura di *sifting* non lineare si estrae la componente più veloce del segnale; tale componente è denominata primo IMF;
- iterando sulla componente residua del segnale si individua il secondo IMF, e così via;
- il segnale è quindi scomposto in un set di oscillazioni, dalla più veloce alla più lenta.

Il grande interesse suscitato dall'EMD nella comunità scientifica è perciò da imputare ai seguenti principali vantaggi:

- si genera una base completa e auto-adattativa;
- ogni elemento della base, gli IMF, è una componente puramente oscillatoria, e pertanto di facile significato fisico, dipendente dalla fisica che sorregge il problema.

Le differenti varianti dell'EMD proposte in letteratura si differenziano per la scelta effettuata in termini di interpolazione e di condizioni di stop (locale e finale) [5.17, 11]. Nella presente tesi si sono effettuate le seguenti scelte d'implementazione dell'algoritmo:

- per l'interpolazione dei massimi e minimi locali si è scelto di utilizzare una spline cubica, la legge proposta nella versione originaria della tecnica EMD. Altre leggi di interpolazione di ordine maggiore sono disponibili in letteratura, ma la sostanziale uguaglianza dei risultati non sembra giustificarne la complicazione algoritmica [5.12];
- la condizione di stop locale (che interrompe la procedura iterativa relativa a uno stesso IMF) comunemente utilizzata richiede che la deviazione standard tra due iterazioni successive sia inferiore a un certo valore, in genere compreso tra $0.2 \div 0.3$:

$$\sum_{k=1}^N \left(\frac{g_{ik}^{(K-1)} - g_{ik}^{(K)}}{g_{ik}^{(K-1)}} \right)^2 < 0.2 \div 0.3 \quad (5.4)$$

Nelle analisi che seguono si è preferito utilizzare il valore 0.2, più vincolante;

- circa la condizione di stop globale, vi sono differenti possibilità: è possibile fissare a priori il numero di IMF, stabilire un valore di tolleranza sull'ampiezza del residuo, oppure richiedere che la procedura di sifting prosegua finché l'andamento del residuo è tale da rendere impossibile l'interpolazione dei massimi e minimi locali (sono infatti necessari almeno un massimo e un minimo, in presenza di massimi e minimi fittizi, e almeno due massimi e due minimi, in caso contrario). La procedura formalmente più corretta è l'ultima, visto che in questo caso nessuna soglia è fissata a priori e quindi, a fronte di un maggiore onere computazionale, gli IMF riprodotti sono esattamente quelli previsti dalla tecnica. Nelle analisi che seguono, tuttavia, data la semplicità dei modelli studiati, il numero di IMF da ricercare verrà imposto a priori; visto che verrà mostrata l'entità ridotta del residuo, questa circostanza è comunque da riguardare come una mera tecnica di risparmio computazionale che non inficia l'accuratezza dei risultati proposti;

- in prossimità dei bordi si utilizza un'estensione del segnale; nello specifico, si introducono su entrambi gli estremi un massimo e un minimo locali ottenuti specchiando asimmetricamente i massimi e minimi più prossimi ai bordi stessi.

5.1.1 Esempio

Si analizza la seguente funzione semplice (frequenza di campionamento di 10 kHz):

$$y = a_1 \sin(f_1 2\pi t) + a_2 \cos(f_2 2\pi t) \quad (5.5)$$

con:

$$a_1 = 3, f_1 = 10, a_2 = 1, f_2 = 5 \quad (5.6)$$

La procedura iterativa dell'EMD è esemplificata in Figura 5.1: i grafici in alto e al centro mostrano gli involucri superiore e inferiore e le corrispondenti medie all'iterazione di ordine 0 e 1, rispettivamente; il grafico in basso mostra l'oscillazione estratta a convergenza (raggiunta dopo 61 iterazioni), ovvero il primo IMF.

Analogamente, i grafici di Figura 5.2 mostrano, dall'alto verso il basso: gli involucri superiore e inferiore e le corrispondenti medie all'iterazione di ordine 0 e 1, e l'oscillazione estratta a convergenza (raggiunta dopo 8 iterazioni), ovvero il secondo IMF.

Il segnale y è infine decomposto nelle componenti oscillatorie di Figura 5.3. Oltre al primo IMF corrispondente all'oscillazione più veloce ($a_1 = 3, f_1 = 10$) e al secondo IMF corrispondente all'oscillazione più lenta ($a_2 = 1, f_2 = 5$), appaiono ulteriori tre componenti: gli IMF terzo e quarto e il residuo, cfr. gli andamenti riportati sulla destra in Figura 5.3. Si precisa, però, che queste ultime componenti spurie, generate erroneamente dal banco di filtri, sono di entità decisamente inferiore rispetto a quella delle componenti di partenza cercate (il rapporto tra l'ampiezza delle prime e quella delle seconde è di circa un quarantesimo).

5.1.2 Effetto del rumore

L'EMD è riconosciuta come uno strumento efficace d'analisi dei dati, ma risulta sensibile al rumore. In effetti, tutti gli strumenti di analisi dei segnali subiscono una *corruzione* simile in presenza di rumore, quindi, quello che si constata è che l'EMD non costituisce, in tal senso, un'eccezione.

A differenza delle altre trasformate, tuttavia, l'EMD ha allo stato attuale una teoria meno ricca su come il rumore si ripercuote sulla decomposizione del segnale, di conseguenza gli IMF desunti da analisi effettuate in presenza di rumore andrebbero utilizzati con cautela [5.9].

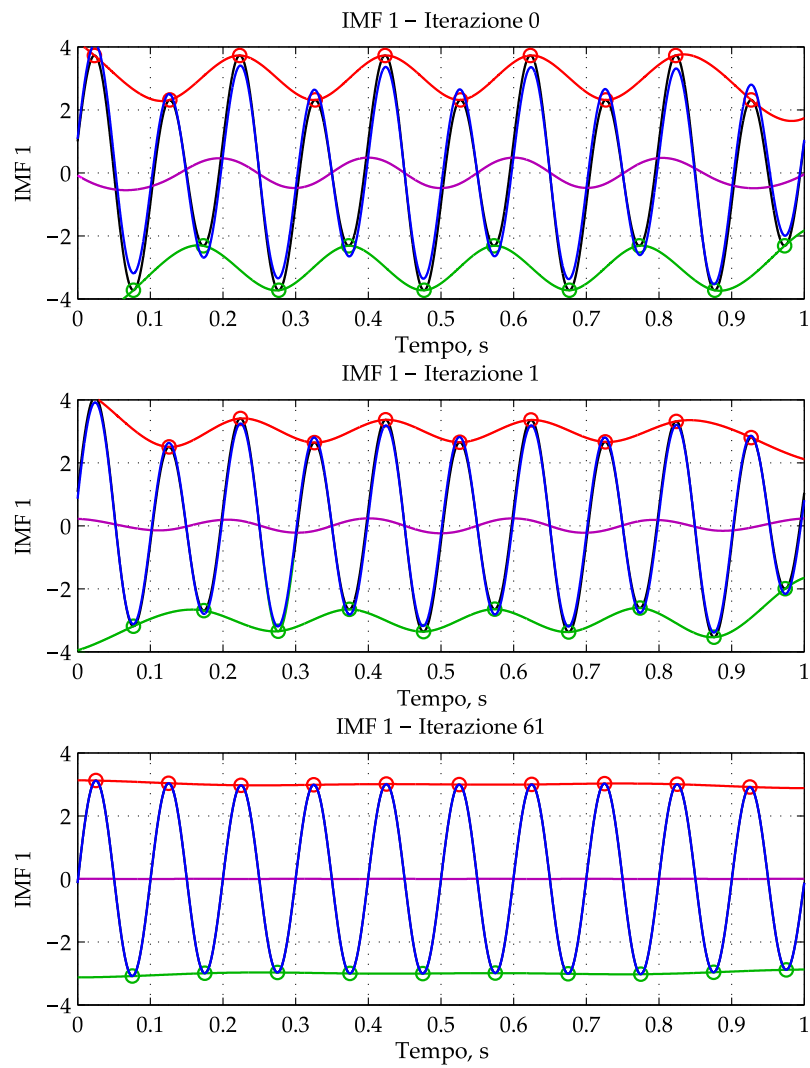


Figura 5.1: Esempificazione della decomposizione operata dall'EMD: primo IMF.

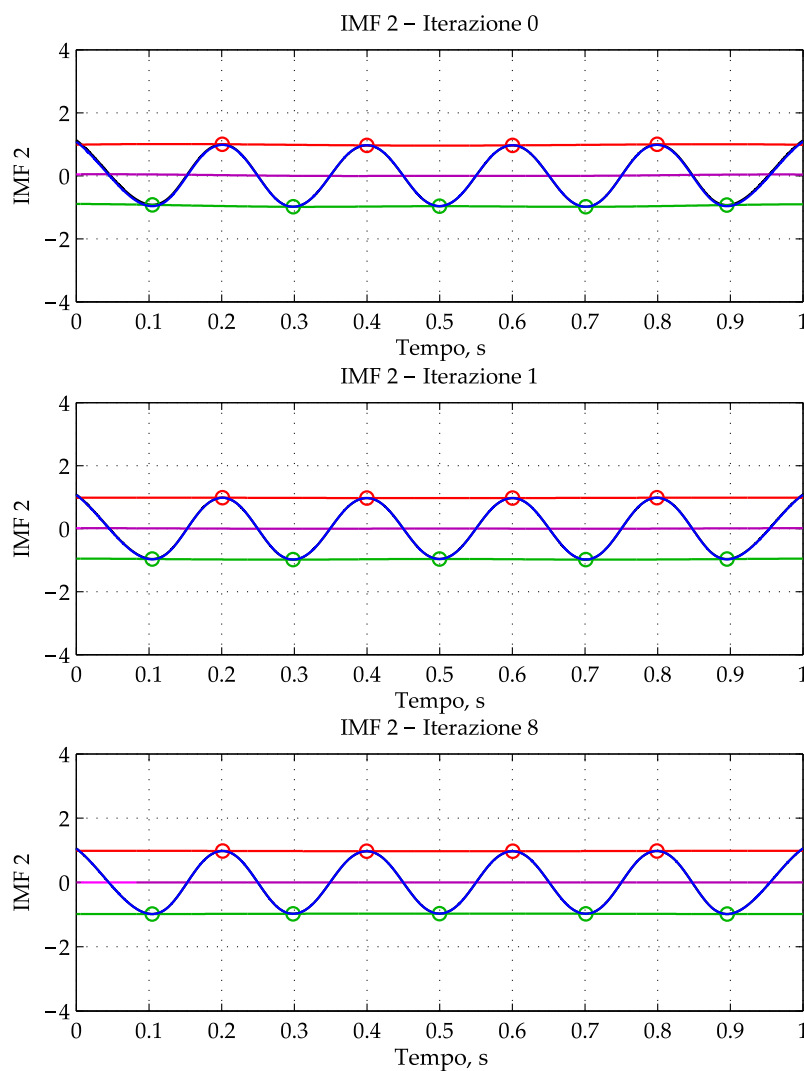


Figura 5.2: Esempificazione della decomposizione operata dall'EMD: secondo IMF.

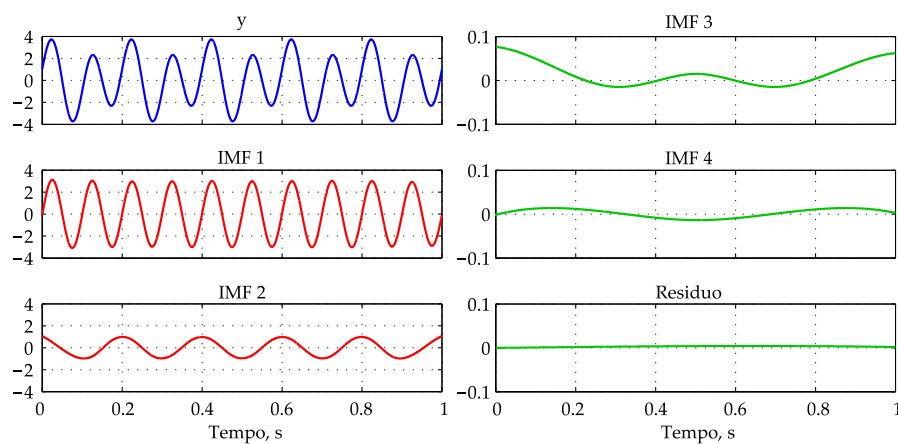


Figura 5.3: Esempificazione della decomposizione operata dall'EMD.

Fortunatamente, esiste una soluzione operativa per rimuovere l'effetto del rumore dalla decomposizione operata dall'EMD [5.25]: la tecnica, chiamata Ensemble Empirical Mode Decomposition consiste nell'analizzare un insieme di segnali costruiti aggiungendo a quello di partenza (somma del segnale utile e di una rumore di entità incognita) un rumore bianco e considerando come IMF effettivi la media di tutti quelli ottenuti dall'insieme. L'idea di base è che l'effetto medio del rumore tende ad annullarsi al crescere del numero di prove, e quindi il risultato non può che essere l'unica parte persistente del segnale, quella correlata all'effettiva risposta.

Esistono altri metodi per eliminare l'effetto del rumore dall'EMD, ma nella maggior parte dei casi sono dedicati soltanto a una data tipologia di segnale [5.5].

5.1.3 Versione ortogonale dell'EMD

Si è già avuto modo di sottolineare come la tecnica EMD sia, *de facto*, una decomposizione empirica, della quale, pertanto, è necessario verificare a posteriori l'affidabilità. Nello specifico, si vuole che gli n -IMF e il corrispondente residuo costituiscano un set di funzioni completo e ortogonale per il segnale dato.

Circa la completezza, ovvero la possibilità di ricostruire il segnale di partenza, la relazione (5.1) testimonia che la conoscenza degli IMF e del residuo è sufficiente per risalire al segnale originario.

Per quanto concerne l'ortogonalità, è conveniente dapprima definire i seguenti indici di ortogonalità parziali IO_{ij} e complessivo IO_T (sia T_c la durata del segnale):

$$\begin{cases} IO_{ij} = \int_0^{T_c} g_i(t)g_j(t) dt \Big/ \int_0^{T_c} g_i(t)^2 + g_j(t)^2 dt & i, j = 1, \dots, n+1 \\ IO_T = \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j=1}^{n+1} \int_0^{T_c} g_i(t)g_j(t) dt \Big/ \int_0^{T_c} y(t)^2 dt & j \neq i \end{cases} \quad (5.7)$$

con la convenzione:

$$g_{n+1}(t) \equiv r_n(t) \quad (5.8)$$

e analogamente, in termini di grandezze discrete:

$$\begin{cases} IO_{ij} = \sum_{k=1}^N g_{ik} g_{jk} \Big/ \sum_{k=1}^N (g_{ik}^2 + g_{jk}^2) & i, j = 1, \dots, n+1 \\ IO_T = \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j=1}^{n+1} \sum_{k=1}^N g_{ik} g_{jk} \Big/ \sum_{k=1}^N y_k^2 & j \neq i \end{cases} \quad (5.9)$$

con:

$$g_{n+1k} \equiv r_{nk} \quad (5.10)$$

La condizione di ortogonalità esatta corrisponde quindi ai seguenti indici:

$$IO_{ij} = 0 \quad (i \neq j) \quad IO_{ii} = 1/2 \quad IO_T = 0 \quad (5.11)$$

L'utilizzo di tali indici nelle applicazioni ha mostrato valori di IO_{ij} e IO_T dell'ordine di $10^{-2} \div 10^{-3}$, valori ridotti che in un primo momento hanno spinto la comunità scientifica a ritenere che gli IMF fossero quasi-ortogonali.

Gli sviluppi successivi hanno però testimoniato che, specie nelle applicazioni energetiche, l'errore commesso nell'utilizzo di IMF non ortogonalizzati può essere molto elevato, anche a fronti di valori degli indici di ortogonalità prossimi a $10^{-2} \div 10^{-3}$ (in effetti ben lontani dallo zero macchina, ovvero dalla precisione di macchina, dell'ordine di 10^{-16} per gli attuali processori). In particolare, l'esempio riportato in [5.8] mostra come la somma dell'energia contenuta nei sub-segnali della base possa essere il 40 % superiore di quella del segnale di partenza.

Per questo motivo, nello stesso documento è presentata una versione modificata dell'EMD, nota anche come **OEMD** (*Orthogonal Empirical Mode Decomposition*), che ha rivisto la procedura precedentemente descritta, arricchendola con il metodo di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt.

La procedura OEMD prevede una decomposizione analoga alla (5.1):

$$y(t) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \bar{g}_i(t) + \bar{r}_n(t) \quad (5.12)$$

nella quale, però, il segnale originario $y(t)$ è scomposto negli n -**OIMF** (*Orthogonal Intrinsic Mode Functions*) $\bar{g}_i(t)$ e il corrispondente residuo finale è $\bar{r}_n(t)$; conseguentemente, in forma discreta si ha:

$$y(t_k) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \bar{g}_i(t_k) + \bar{r}_n(t_k) \quad (5.13)$$

e in forma compatta:

$$y_k = \sum_{i=1}^n \alpha_i \bar{g}_{ik} + \bar{r}_{nk} \quad y_k = y(t_k) \quad \bar{g}_{ik} = \bar{g}_i(t_k) \quad \bar{r}_{nk} = \bar{r}_n(t_k) \quad k = 1, \dots, N \quad (5.14)$$

Nella procedura operativa dell'OEMD, per motivi di brevità e chiarezza espositiva qui esposta in termini continui (salvo poi fornire la generalizzazione al caso discreto), il primo OIMF è posto pari al primo IMF, ovvero si assume:

$$\bar{g}_1(t) = g_1(t) \quad (5.15)$$

Come già detto, il secondo IMF $g_2(t)$ non è in genere ortogonale rispetto al primo IMF $g_1(t)$, pertanto, allo scopo di ottenere un secondo OIMF $\bar{g}_2(t)$ ortogonale rispetto al

primo OIMF $\bar{g}_1(t) = g_1(t)$, si applica il metodo di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt. Si esprime $\bar{g}_2(t)$ come:

$$\bar{g}_2(t) = g_2(t) - \beta_{21}\bar{g}_1(t) \quad (5.16)$$

essendo β_{21} il coefficiente di ortogonalità tra $g_2(t)$ e $\bar{g}_1(t)$. Per valutare tale coefficiente si impone il soddisfacimento della relazione:

$$\int_0^{T_c} \bar{g}_1(t) \bar{g}_2(t) dt = 0 \quad (5.17)$$

che facendo uso della (5.16) si scrive pure:

$$\int_0^{T_c} \bar{g}_1(t) g_2(t) dt - \int_0^{T_c} \bar{g}_1(t) \beta_{21} \bar{g}_1(t) dt = 0 \quad (5.18)$$

da cui si ottiene immediatamente:

$$\beta_{21} = \int_0^{T_c} \bar{g}_1(t) g_2(t) dt \Big/ \int_0^{T_c} \bar{g}_1(t)^2 dt \quad (5.19)$$

La procedura viene quindi ripetuta in maniera routinaria imponendo nella condizione di ortogonalità:

$$\int_0^{T_c} \bar{g}_h(t) \bar{g}_j(t) dt = 0 \quad h = 1, \dots, j-1 \quad j = 2, \dots, n \quad (5.20)$$

l'equazione:

$$\bar{g}_j(t) = g_j(t) - \sum_{i=1}^{j-1} \beta_{ji} \bar{g}_i(t) \quad j = 2, \dots, n \quad (5.21)$$

con β_{ji} il coefficiente di ortogonalità tra $g_j(t)$ e $\bar{g}_i(t)$. Si ottiene:

$$\int_0^{T_c} \bar{g}_h(t) g_j(t) dt - \int_0^{T_c} \bar{g}_h(t) \sum_{i=1}^{j-1} \beta_{ji} \bar{g}_i(t) dt = 0 \quad (5.22)$$

da cui:

$$\int_0^{T_c} \bar{g}_h(t) g_j(t) dt - \sum_{i=1}^{j-1} \beta_{ji} \int_0^{T_c} \bar{g}_h(t) \bar{g}_i(t) dt = 0 \quad (5.23)$$

e quindi, per l'ortogonalità tra $\bar{g}_h(t)$ e $\bar{g}_i(t)$ per $h \neq i$:

$$\beta_{ji} = \int_0^{T_c} \bar{g}_i(t) g_j(t) dt \Big/ \int_0^{T_c} \bar{g}_i(t)^2 dt \quad i = 1, \dots, j-1 \quad j = 2, \dots, n \quad (5.24)$$

Per identificare i termini α_i e il residuo $\bar{r}_n(t)$ che appaiono nella (5.12), si inseriscono nella relazione (5.1) gli IMF espressi in funzione degli OIMF, come da (5.21):

$$\begin{aligned} y(t) &= \sum_{i=1}^n g_i(t) + r_n(t) = \\ &= \sum_{j=1}^n \left(\bar{g}_j(t) + \sum_{i=1}^{j-1} \beta_{ji} \bar{g}_i(t) \right) + r_n(t) = \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^j \beta_{ji} \bar{g}_i(t) + r_n(t) \end{aligned} \quad (5.25)$$

avendo fatto uso, nell'ultima uguaglianza, della seguente definizione sul coefficiente di ortogonalità:

$$\beta_{jj} = 1 \quad (5.26)$$

Un'espressione più comoda della (5.25) può ricavarsi cambiando l'ordine della doppia sommatoria¹:

$$y(t) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n \beta_{ji} \bar{g}_i(t) + r_n(t) \quad (5.27)$$

relazione che confrontata con la (5.12) permette di identificare i termini α_i :

$$\alpha_i = \sum_{j=i}^n \beta_{ji} \quad (5.28)$$

e constatare inoltre che:

$$\bar{r}_n(t) = r_n(t) \quad (5.29)$$

Appare evidente come le quantità scalari α_i , precedentemente introdotte nella (5.12) per chiarezza espositiva e poi definite nella (5.28), non influiscono sull'ortogonalità degli OIMF intesi come $\bar{g}_i(t)$; si conviene, pertanto, di ridefinire gli OIMF come $g_i^*(t)$:

$$y(t) = \sum_{i=1}^n g_i^*(t) + \bar{r}_n(t) \quad g_i^*(t) = \alpha_i \bar{g}_i(t) \quad (5.30)$$

Si precisa, inoltre, che la procedura di ortogonalizzazione adottata non influisce sul residuo, che resta, in generale, non ortogonale rispetto agli OIMF. Tale circostanza trova giustificazione nel peso ridotto genericamente assunto dal residuo finale nella descrizione del segnale.

Sintetizzando la procedura testé esposta, la tecnica OEMD si articola nei seguenti punti:

¹Cambio dell'ordine delle sommatorie: si utilizza la relazione del cambio dell'ordine delle sommatorie:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n a_{ij} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^j a_{ij}$$

- $\bar{g}_1(t) = g_1(t)$
- $\beta_{ji} = \int_0^{T_c} \bar{g}_i(t) g_j(t) dt \Big/ \int_0^{T_c} \bar{g}_i(t)^2 dt \quad i = 1, \dots, j-1 \quad j = 2, \dots, n$
- $\bar{g}_j(t) = g_j(t) - \sum_{i=1}^{j-1} \beta_{ji} \bar{g}_i(t) \quad j = 2, \dots, n$
- $\alpha_i = \sum_{j=i}^n \beta_{ji} \quad (\beta_{ii} = 1) \quad i = 1, \dots, n$
- $\bar{r}_n(t) = r_n(t)$
- $g_i^*(t) = \alpha_i \bar{g}_i(t)$
- $y(t) = \sum_{i=1}^n g_i^*(t) + \bar{r}_n(t)$

ovvero, nella versione discreta:

- $\bar{g}_{1k} = g_{1k}$
- $\beta_{ji} = \sum_{k=1}^N \bar{g}_{ik} g_{jk} \Big/ \sum_{k=1}^N \bar{g}_{ik}^2 \quad i = 1, \dots, j-1 \quad j = 2, \dots, n$
- $\bar{g}_{jk} = g_{jk} - \sum_{i=1}^{j-1} \beta_{ji} \bar{g}_{ik} \quad j = 2, \dots, n$
- $\alpha_i = \sum_{j=i}^n \beta_{ji} \quad (\beta_{ii} = 1) \quad i = 1, \dots, n$
- $\bar{r}_{nk} = r_{nk}$
- $g_{ik}^* = \alpha_i \bar{g}_{ik}$
- $y_k = \sum_{i=1}^n g_{ik}^* + \bar{r}_{nk}$

Appare utile sottolineare come la tecnica OEMD non abbia alcun effetto sulla procedura di estrazione (sifting), che resta immutata rispetto al caso EMD.

5.2 Trasformate di Fourier, Wavelet e di Hilbert-Huang

Tra le analisi tempo-frequenza esistenti (distribuzione di Wigner-Ville, principal component analysis, ...) la trasformata Wavelet è indubbiamente una di quelle di maggior

successo. Anche la trasformata di Hilbert, se usata in concomitanza con segnali (analitici) *ben posti*, nel senso che verrà chiarito in avanti, permette di localizzare congruentemente un segnale nel dominio tempo-frequenza. Nel seguito vengono richiamati i concetti basilari e le principali applicazioni di entrambe le trasformate.

5.2.1 Trasformata Wavelet

La *trasformata Wavelet*, una trasformata integrale inizialmente proposta in [5.16] nel 1982, è esprimibile nella forma:

$$\mathcal{W}(a, b, y) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} y(t) \psi^* \left(\frac{t-b}{a} \right) dt \quad a > 0 \quad (5.31)$$

ove ψ rappresenta una funzione nota come *mother wavelet* (si utilizza l'asterisco per indicare il complesso coniugato), mentre a e b sono, rispettivamente, un coefficiente di scala e uno di traslazione.

Si tratta, pertanto, di una trasformata integrale (2.18) in cui gli estremi A e B tendono a $-\infty$ e ∞ , rispettivamente, mentre il nucleo $K(s, t)$ è posto pari $\frac{1}{\sqrt{a}} \psi^* \left(\frac{t-b}{a} \right)$. Ed è proprio la differente definizione del nucleo rispetto alla trasformata di Fourier a far sì che la trasformata Wavelet risulti localizzata sia nel tempo sia nella frequenza.

Per meglio illustrare il concetto, è utile un confronto diretto con le *onde* utilizzate nell'analisi di Fourier. Entrambe le trasformate rappresentano un segnale attraverso una base di funzioni: se per la trasformata di Fourier si tratta di segnali sinusoidali e cosinusoidali modulati in frequenza ma definiti sull'intero dominio del tempo, per la trasformata Wavelet questi segnali (le *mother wavelet*) sono non solo modulati in frequenza ma anche definiti su un sottointervallo di ampiezza ridotta. Analiticamente, questo implica che mentre entrambe le basi di funzioni hanno una loro localizzazione in frequenza, soltanto la trasformata Wavelet è dotata di funzioni compatte (finite nel tempo) in grado di fornire informazioni temporali sul segnale.

Bisogna precisare, tuttavia, che anche la trasformata di Fourier è in grado di fornire la doppia localizzazione tempo-frequenza, a patto di utilizzare una procedura di *windowing* per creare la comunemente detta trasformata di Fourier a tempo breve, ovvero la **STFT** (*Short-Time Fourier Transform*). In pratica, si adopera come finestra un'onda quadra che tronca le funzioni seno e coseno per selezionare un particolare intervallo temporale: poiché la stessa finestra è utilizzata per tutte le frequenze, la risoluzione temporale è costante su tutto il dominio. Lo stesso non accade con la trasformata wavelet per la quale si assiste a una localizzazione crescente nel tempo al crescere della frequenza; un'esemplificazione di questo concetto è riportata in Figura 5.4. Questo giustifica la grande diffusione della Wavelet in tutta una serie di applicazioni: per l'analisi

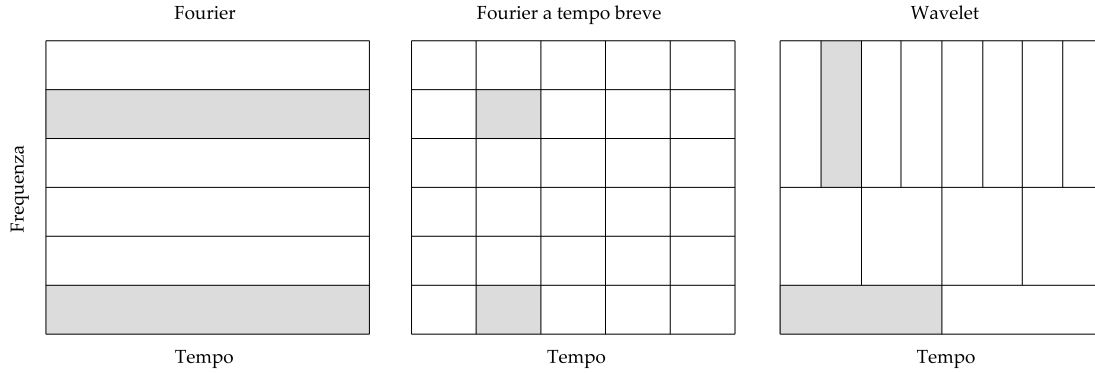


Figura 5.4: Localizzazione tempo-frequenza delle trasformate di Fourier, Fourier a tempo breve e Wavelet.

dei segnali contenenti sia componenti debolmente variabili che discontinuità, le funzioni a bassa frequenza rilevano le prime componenti, mentre quelle ad alta frequenza permettono di analizzare le discontinuità [5.2].

La scelta della mother wavelet è importante, in quanto capace di influenzare sensibilmente la natura dei risultati. Nella fattispecie, si sono prese in considerazione le seguenti tre mother wavelet: di Morlet (quella proposta originariamente), il cappello messicano (di ampio utilizzo), e la gaussiana (una delle più accreditate). Posto $\tau = \frac{t-b}{a}$, le equazioni che definiscono la forma di queste mother wavelet sono le seguenti:

- Morlet:

$$\psi(\tau) = e^{-\tau^2/2} \cos(5\tau) \quad (5.32)$$

- cappello messicano:

$$\psi(\tau) = \frac{2}{\sqrt{3}\pi^{1/4}} (1 - \tau^2) e^{-\tau^2/2} \quad (5.33)$$

- gaussiana di ordine n :

$$\psi(\tau) = c_n \frac{d^n e^{-\tau^2/2}}{dx^n} \quad (5.34)$$

ove la costante c_n si determina imponendo la condizione:

$$\sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} \psi^2(\tau) d\tau} = 1 \quad (5.35)$$

e si può facilmente dimostrare che il diffuso cappello messicano corrisponde alla gaussiana di ordine 2.

I grafici di Figura 5.5 mostrano gli andamenti delle tre mother wavelet considerate: appare evidente come queste *ondine* siano localizzate tanto nel dominio del tempo

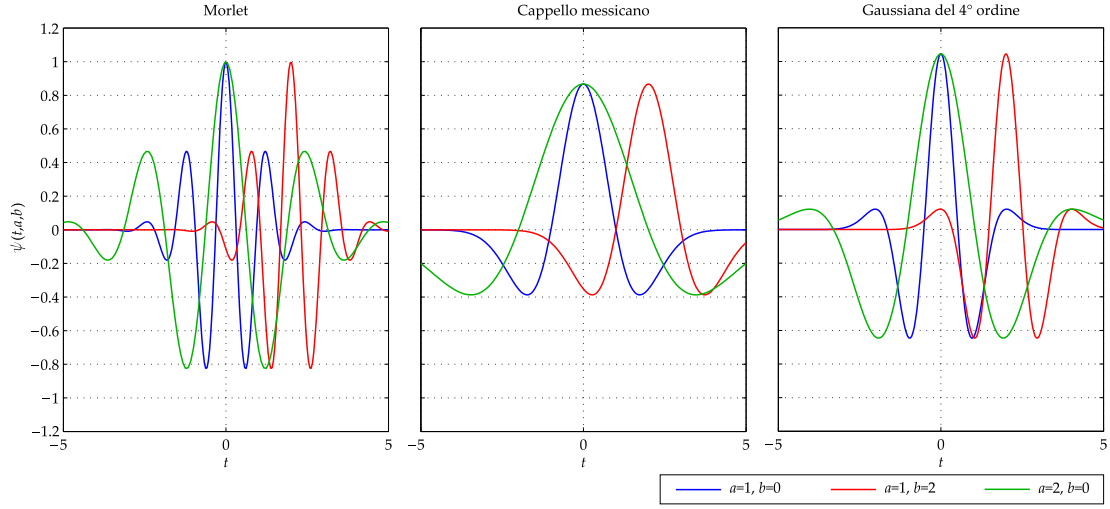


Figura 5.5: Andamenti delle tre mother wavelet considerate per diversi valori dei coefficienti a e b .

quanto in quello delle frequenze. Per quanto concerne i due coefficienti, quello di scala ha il ruolo di modificare la frequenza ispezionabile dalla trasformata Wavelet, mentre il secondo, quello di traslazione, permette di spazzare tutto l'intervallo di definizione del segnale. Tuttavia, mentre la relazione tra il dominio del segnale e il coefficiente b è immediata, oltre che lineare, la relazione tra la frequenza e il coefficiente di scala a non lo è altrettanto. In effetti, nel caso di trasformata wavelet sarebbe più opportuno parlare di pseudo-frequenza f , in quanto ottenuta per identificazione di una frequenza caratteristica, detta anche frequenza centrale, della mother wavelet:

$$f = \frac{C_f}{a} \quad C_f = \frac{f_c}{\Delta} \quad (5.36)$$

con C_f una costante dimensionale, f_c la frequenza centrale della mother wavelet adottata e Δ l'intervallo di campionamento. Essendo tale relazione non lineare, è importante, ai fini sia computazionali sia di bontà dei risultati, stabilire il range di frequenza da indagare e risalire a ritroso al corrispondente range del coefficiente di scala. Il modulo $|\mathcal{W}(a, b, y)|$ della trasformata fornisce, infine, la misura dell'ampiezza atta a completare la descrizione tempo-frequenza del dato segnale.

Un problema noto per il caso della trasformata Wavelet è l'analisi del segnale in prossimità degli istanti iniziali e finali (i bordi del segnale), ove si possono riscontrare imprecisioni numeriche anche elevate. Una tecnica sviluppata in letteratura per ridurre gli effetti di bordo è l'estensione del segnale oltre l'effettivo dominio, con valori fittizi capaci di ridurre la dispersione spettrale della trasformata. Le analisi che seguono si riferiscono a un'estensione asimmetrica del segnale. Come verrà mostrato nell'esempio

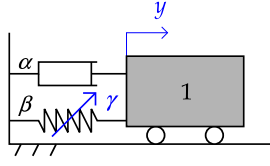


Figura 5.6: Oscillatore di Duffing.

che segue, la principale difficoltà legata alla trasformata Wavelet, qui utilizzata come termine di confronto, è tuttavia la corretta calibrazione del metodo.

5.2.1.1 Esempio

Si analizza la risposta dell'oscillatore di Duffing non forzato; in forma canonica l'equazione del moto si scrive:

$$\ddot{y} + \alpha \dot{y} + \beta y + \gamma y^3 = 0 \quad (5.37)$$

ovvero, si tratta di un oscillatore smorzato con un termine non lineare (cubico) di rigidità, cfr. Figura 5.6. In particolare, in questo esempio si assumono i valori:

$$\alpha = 0.03 \quad \beta = 0 \quad \gamma = 1 \quad (5.38)$$

Il sistema è abbandonato nella configurazione iniziale $y(0) = 2$, $\dot{y}(0) = 0$ (non di equilibrio). L'analisi della risposta (frequenza di campionamento di 10 Hz) è quella riportata in Figura 5.7: lo spostamento, riportato nel grafico di sinistra, è analizzato sia con la trasformata di Fourier, grafico al centro, sia con la trasformata Wavelet, grafico di destra. I risultati permettono di apprezzare come la trasformata di Fourier, essendo localizzata solo nel dominio del tempo, non possa che restituire una sorta di risposta *media* nel tempo; con la trasformata Wavelet si riesce invece a cogliere sia la modulazione in ampiezza che l'allungamento del periodo di oscillazione. Si rilevano inoltre, per i già citati effetti di bordo, imprecisioni numeriche negli istanti iniziali.

Il confronto tra le trasformate Wavelet ottenute utilizzando le tre mother wavelet discusse al paragrafo precedente è mostrato in Figura 5.8: se con la mother wavelet di Morlet l'andamento testimonia una localizzazione tempo-frequenza accettabile, per il cappello messicano e la gaussiana del 4° ordine i risultati appaiono troppo dispersi, mettendo in luce quelli che sono i problemi di calibrazione della trasformata.

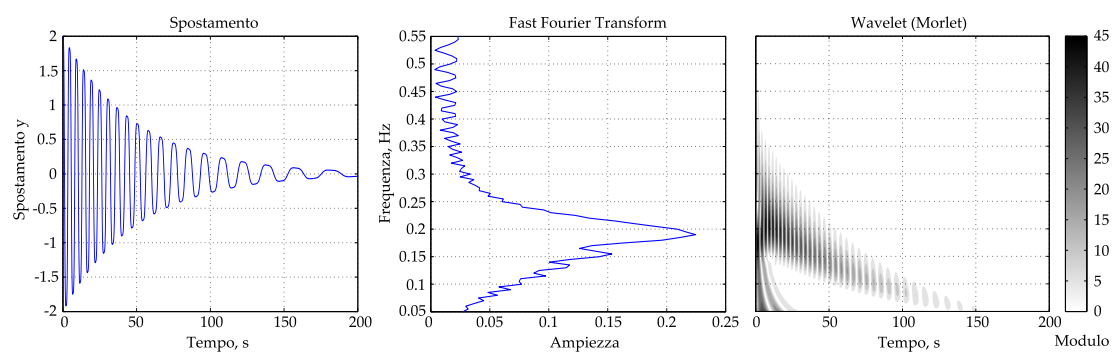


Figura 5.7: Oscillatore di Duffing: a sinistra il segnale di risposta, al centro la trasformata di Fourier, a destra la trasformata Wavelet.

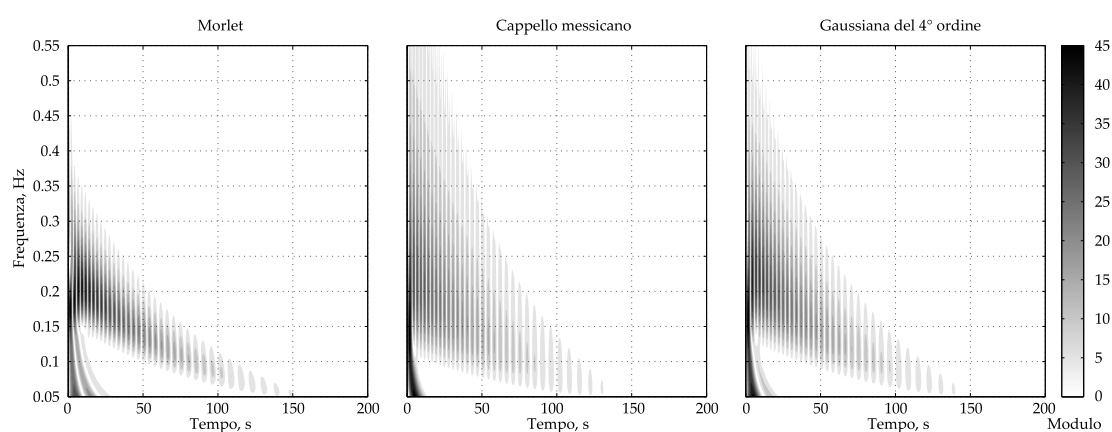


Figura 5.8: Confronto tra le trasformate Wavelet della risposta dell'oscillatore di Duffing.

5.2.2 Trasformata di Hilbert

La trasformata di Hilbert, introdotta nel 1905 per opera dello stesso Hilbert, restituisce una frequenza e un'ampiezza funzioni del tempo; formalmente, è definita come:

$$\mathcal{H}(t) = \frac{1}{\pi} P.V. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y(\tau)}{(t - \tau)} d\tau \quad (5.39)$$

ove *P.V.* indica il valore principale di Cauchy².

Con questa definizione si costruisce il segnale analitico:

$$Y(t) = y(t) + i y^*(t) \quad y^*(t) = \mathcal{H}(t) \quad (5.40)$$

e se ne fornisce una rappresentazione in termini di coordinate polari complesse:

$$Y(t) = a(t)e^{i\vartheta(t)} \quad (5.41)$$

essendo:

$$a(t) = \sqrt{y^2(t) + y^{*2}(t)} \quad \vartheta(t) = \arctan \frac{y^*(t)}{y(t)} \quad (5.42)$$

L'ampiezza è rappresentata da $a(t)$, mentre la frequenza, spesso detta anche frequenza istantanea, è valutata per derivazione dell'angolo di fase $\vartheta(t)$:

$$\omega(t) = \frac{d\vartheta(t)}{dt} \quad (5.43)$$

In sostanza, con riferimento all'esempio di Figura 5.4, la trasformata di Hilbert fornisce, nei limiti della risoluzione del segnale, la localizzazione ottimale nel dominio tempo-frequenza, ovvero, una localizzazione *puntuale*.

La principale difficoltà che si ha con la trasformata di Hilbert è che la frequenza istantanea può essere definita propriamente solo se la funzione analizzata è *localmente* simmetrica e a media nulla [5.7]: ricordando la definizione di IMF fornita al § 5.1 se

²*Valore principale di Cauchy*: si ricorda che il valore principale di Cauchy è definito, in base al dominio di integrazione e alla singolarità del caso, come uno dei seguenti metodi di soluzione degli integrali impropri:

- dominio illimitato:

$$P.V. \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_{-a}^a f(x) dx$$

- singolarità in $c \in (a, b)$:

$$P.V. \int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(\int_a^{c-\varepsilon} f(x) dx + \int_{c+\varepsilon}^b f(x) dx \right)$$

- dominio illimitato e singolarità in $c \in (a, b)$:

$$P.V. \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(\int_{c-1/\varepsilon}^{c-\varepsilon} f(x) dx + \int_{c+\varepsilon}^{c+1/\varepsilon} f(x) dx \right)$$

ne deduce come l'insieme degli IMF sia una base suscettibile di una congrua rappresentazione in termini della trasformata di Hilbert. L'utilizzo della tecnica EMD e della trasformata di Hilbert conduce alla cosiddetta *trasformata di Hilbert-Huang*, in breve **HHT** (*Hilbert-Huang Transform*).

In merito ai dettagli e alle scelte effettuate nell'implementazione dell'algoritmo, si riportano le seguenti informazioni principali:

- pur essendo la trasformata di Hilbert una curva nello spazio ampiezza-tempo-frequenza, si utilizza una rappresentazione analoga a quella già adoperata nel caso di trasformata Wavelet e ampiamente diffusa in letteratura, in cui la trasformata è riportata nel piano tempo - frequenza, con l'ampiezza differenziata tramite una scala cromatica;
- per valutare la frequenza istantanea si utilizza uno schema alle differenze finite equispaziate su 5 punti (numero di punti maggiore di quello strettamente necessario, essendo l'ordine di derivazione pari a 1, qui utilizzato per stabilizzare la variazione della derivata). Nello specifico, i pesi da applicare alla successione di 5 punti per valutare la derivata in un dato istante k sono:

- all'estremo sinistro, $k = 1, 2$ (differenza finita in avanti):

$$\begin{array}{ccccc} k & k+1 & k+2 & k+3 & k+4 \\ \hline -25/12 & 4 & -3 & 4/3 & -1/4 \end{array}$$

- nel dominio, $k = 3, \dots, N-2$ (differenza finita centrata):

$$\begin{array}{ccccc} k-2 & k-1 & k & k+1 & k+2 \\ \hline 1/12 & -2/3 & 0 & 2/3 & -1/12 \end{array}$$

- all'estremo destro, $k = N-1, N$ (differenza finita all'indietro):

$$\begin{array}{ccccc} k-4 & k-3 & k-2 & k-1 & k \\ \hline 1/4 & -4/3 & 3 & -4 & 25/12 \end{array}$$

L'esempio che segue mostra le implicazioni delle scelte effettuate per la valutazione della frequenza istantanea.

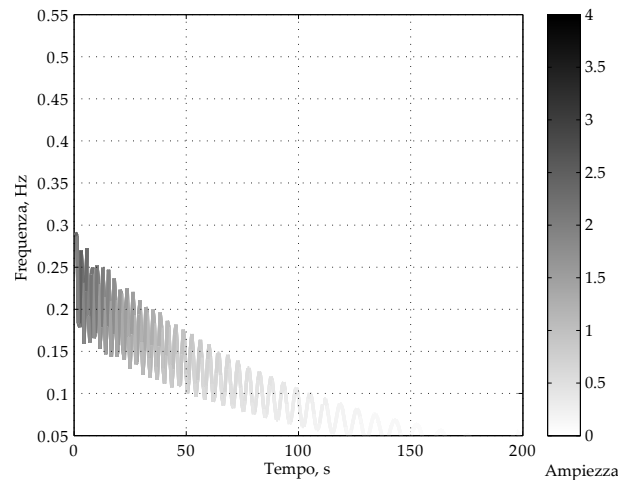


Figura 5.9: Trasformata di Hilbert della risposta dell'oscillatore di Duffing.

5.2.2.1 Esempio

Si analizza nuovamente l'oscillatore di Duffing di Figura 5.6; per una descrizione completa delle caratteristiche dello stesso si veda quanto già riportato al § 5.2.1.1.

Il grafico di Figura 5.9 mostra l'analisi della risposta dell'oscillatore con la trasformata di Hilbert: l'andamento testimonia una discreta localizzazione tempo-frequenza, parzialmente inficiata dalle oscillazioni della frequenza. L'origine del fenomeno è da ricondurre all'operazione di derivazione effettuata sull'angolo di fase che, in base al segnale analizzato e al suo campionamento, oltre che in funzione della discretizzazione della derivata stessa, può generare oscillazioni anche significative della frequenza.

5.2.3 Confronto tra le trasformate

Trascurando la trasformata di Fourier, per il cui utilizzo si rimanda al Capitolo 2, è opportuno delineare i principali utilizzi in ambito strutturale della trasformata Wavelet e della trasformata di Hilbert-Huang.

Per quanto concerne la prima, già in lavori meno recenti si era verificato come la trasformata Wavelet fosse particolarmente efficace ai fini non solo della compressione dei dati relativi a vibrazioni non-stazionarie, ma anche per la selezione delle caratteristiche dei segnali stessi [5.21]. Le sue potenzialità si sono altresì rivelate efficaci nella soluzione del problema diretto; tra i lavori di letteratura appartenenti a questo filone si può citare [5.1], in cui la trasformata Wavelet è usata per lo studio delle vibrazioni libere di un cavo elastico trascinante una massa localizzata.

Nell'ambito del problema inverso, in [5.18] sono discusse le motivazioni e le formulazioni dell'identificazione strutturale dinamica tramite la trasformata Wavelet. Molti

lavori si sono poi focalizzati sullo studio dello smorzamento, che, rispetto alle proprietà di massa e rigidità, è una quantità intrinsecamente più difficile da stimare, a causa dei fenomeni dissipativi non propriamente banali che ne alimentano lo sviluppo, e da qui l'utilizzo di una trasformata tempo-frequenza come la Wavelet [5.19]. Una procedura d'identificazione dello smorzamento basata su analisi Wavelet della risposta è disponibile in [5.13]; la procedura, che da un punto di vista dell'elaborazione del segnale può essere assimilata a una variante del metodo del decremento logaritmico, è stata poi validata sia numericamente che sperimentalmente [5.4].

Uno studio sull'identificazione modale di sistemi in oscillazione libera è riportato in [5.14]; tuttavia, come già evidenziato pure nel presente documento, la corretta calibrazione della mother wavelet può essere difficile [5.28]. In [5.15] è presentato un interessante lavoro sulla calibrazione della trasformata Wavelet ai fini dell'identificazione modale di sistemi in oscillazione libera e vengono fornite alcune indicazioni su come agevolare la localizzazione della trasformata e su come prevenire gli effetti di bordo per i casi delle mother wavelet di Morlet e Cauchy.

Anche la trasformata di Hilbert-Huang è stata utilizzata per l'identificazione modale di sistemi lineari, in [5.26, 27], ad esempio, analizzando con l'HHT le serie temporali di vibrazioni libere; per ulteriori commenti a riguardo si rimanda al capitolo successivo, in cui il concetto verrà più dettagliatamente analizzato.

Inoltre, entrambe le trasformate si sono dimostrate efficaci ai fini dell'identificazione dinamica non-lineare. In [5.24, 23] è presentato un metodo basato sull'uguaglianza con un sistema SDoF lineare tempo-variante e sull'utilizzo della trasformata Wavelet, mentre in [5.20] la stessa trasformata è utilizzata per l'identificazione di sistemi MDoF non lineari eccitati da azioni impulsive. Per l'HHT, [5.10] si concentra sul rapporto tra la trasformata e il metodo perturbativo *complexification-averaging*, proponendo una tecnica d'identificazione non lineare basata sulla relazione uno-a-uno tra gli IMF e la dinamica del sistema, mentre [5.22] presenta una tecnica d'identificazione del danno che utilizza la variazione di uno smorzamento equivalente estratto dalla trasformata HHT di risposte strutturali non lineari.

È opportuno segnalare la presenza di alcuni lavori dedicati a costruire, in ambito strutturale, un collegamento tra la trasformata Wavelet e quella di Hilbert, cfr. [5.3].

In Tabella 5.1 è riportato, infine, un quadro di sintesi delle caratteristiche delle trasformate di Fourier, Wavelet e di Hilbert-Huang. In particolare, la tabella mostra che la HHT non è limitata dal *principio di indeterminazione tonale*, una legge analoga al principio di indeterminazione di Heisenberg della fisica, che limita la capacità delle tecniche tempo-frequenza di localizzare esattamente un segnale. In parole semplici, il principio sancisce che misure di frequenza ad alta risoluzione possono essere realizzate

	Fourier	Wavelet	Hilbert-Huang
Formulazione	teorica	teorica	empirica
Base	<i>a priori</i>	<i>a priori</i>	adattativa
Frequenza	globale	locale	istantanea
Presentazione	ampiezza - - frequenza	ampiezza - tempo - - frequenza	ampiezza - tempo - - frequenza
Non stazionarietà	no	sì	sì
Non linearità	no	no	sì

Tabella 5.1: Confronto tra le trasformate di Fourier, Wavelet e di Hilbert-Huang.

a scapito di una minore precisione sulla tempistica, e viceversa: questo spiega perché le trasformate di Fourier a tempo discreto e Wavelet siano rappresentate come dei rettangoli nel dominio tempo-frequenza, cfr. Figura 5.4. Tuttavia, poiché la motivazione teorica di tale indeterminazione risiede nell'operazione di convoluzione di tale tipo di trasformate, appare chiaro che il principio cessa di valere per il caso di Hilbert-Huang, ove la frequenza è ottenuta per derivazione [5.6].

L'esempio che segue ha lo scopo di meglio esemplificare le caratteristiche delle tecniche descritte con riferimento a un modello strutturale semplice. Le versioni della trasformata Wavelet e di Hilbert implementate in questo caso sono due versioni migliorate atte a ridurre i fenomeni di dispersione riscontrati negli esempi precedenti; per evitare di appesantire la trattazione, le specifiche delle due versioni sono riportate nell'Appendice C.

5.2.3.1 Esempio

Si analizza il sistema piano di Figura 5.10.

Si tratta di un telaio *shear type* a 2 piani, ovvero, a 2 gradi di libertà. Analogamente a quanto visto al § 3.6.3, le equazioni del moto di scrivono:

$$\begin{bmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_1 + K_2 & -K_2 \\ -K_2 & K_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (5.44)$$

da cui, assumendo i valori numerici:

$$M_1 = 3\text{kg} \quad M_2 = 1\text{kg} \quad K_1 = 1800\text{N/m} \quad K_2 = 1800\text{N/m} \quad (5.45)$$

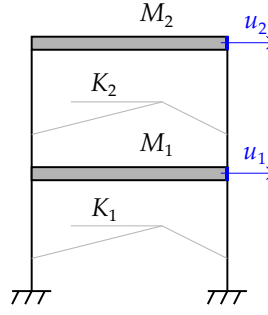


Figura 5.10: Sistema oggetto di studio.

si ottengono le seguenti matrici di massa e rigidezza:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} K_1 + K_2 & -K_2 \\ -K_2 & K_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3600 & -1800 \\ -1800 & 1800 \end{bmatrix}$$
(5.46)

Ammettendo che lo smorzamento sia classico (cfr. (2.48)) e arrestando la serie ai soli primi due termini, si ottiene una matrice di smorzamento siffatta:

$$\mathbf{C} = a_0 \mathbf{M} + a_1 \mathbf{K}$$
(5.47)

da cui, forniti i valori:

$$a_0 = 0.3150 \quad a_1 = 0.0003$$
(5.48)

si ottiene:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2.02 & -0.54 \\ -0.54 & 0.85 \end{bmatrix}$$
(5.49)

Le autosoluzioni del sistema sono mostrate in Tabella 5.2; si riportano, da sinistra verso destra: gli autovalori λ_i e i corrispondenti valori di frequenze angolari ω_i , frequenze cicliche f_i e periodi T_i , i fattori di smorzamento ξ_i e le componenti (per colonne) degli autovettori ϕ_i , ovvero i modi di vibrare, proposti anche in versione grafica in Figura 5.11. Come criterio di scala dei modi si è scelto di normalizzare rispetto alla componente massima.

Eccitando il sistema con un impulso unitario sulla massa in sommità e registrando l'accelerazione dello stesso grado di libertà (frequenza di campionamento di 5 kHz) si ottiene quanto riportato in Figura 5.12.

Modo	$\lambda_i, (\text{rad/s})^2$	$\omega_i, \text{rad/s}$	f_i, Hz	T_i, s	$\xi_i, \%$	DoF	ϕ_1	ϕ_2
1	418.3	20.453	3.255	0.307	1.08	1°	0.768	-0.434
2	2581.7	50.810	8.087	0.124	1.07	2°	1.000	1.000

Tabella 5.2: Caratteristiche modali del sistema.

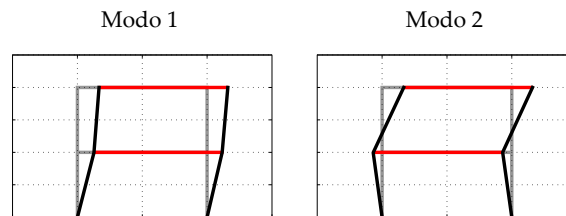


Figura 5.11: Modi di vibrare del sistema.

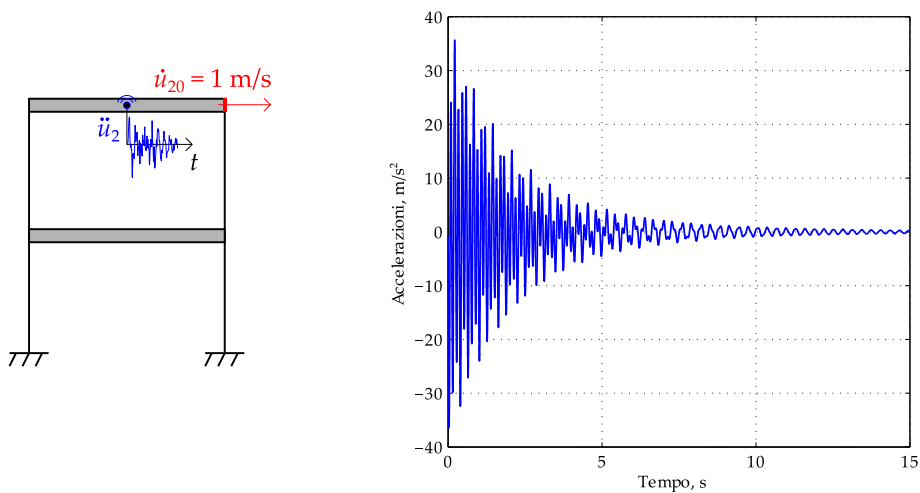


Figura 5.12: Risposta oggetto di studio: a sinistra il sistema di eccitazione e registrazione, a destra la storia temporale corrispondente.

Tale segnale di risposta, costruito tramite la soluzione analitica³, è analizzato con le versioni avanzate della trasformata Wavelet e della trasformata di Hilbert-Huang

³*Oscillazioni libere*: le soluzioni delle equazioni del moto nel caso di oscillazioni libere di un modello parametrico modale sono le seguenti.

In assenza di smorzamento si ha:

$$q_i(t) = A_i \cos(\omega_i t) + B_i \sin(\omega_i t)$$

con:

$$A_i = q_i(0) \quad B_i = \frac{\dot{q}_i(0)}{\omega_i}$$

Per fattore di smorzamento ξ_i inferiore all'unità si ha:

$$q_i(t) = (A_i \cos(\omega_{id} t) + B_i \sin(\omega_{id} t)) e^{-\xi_i \omega_i t}$$

con:

$$A_i = q_i(0) \quad B_i = \frac{\dot{q}_i(0) + q_i(0)\xi_i\omega_i}{\omega_{id}} \quad \omega_{id} = \omega_i \sqrt{1 - \xi_i^2}$$

Per fattore di smorzamento ξ_i pari all'unità si ha:

$$q_i(t) = (A_i (1 + \omega_i t) + B_i t) e^{-\omega_i t}$$

con:

$$A_i = q_i(0) \quad B_i = \dot{q}_i(0)$$

Per fattore di smorzamento ξ_i superiore all'unità si ha:

$$q_i(t) = (A_i \cosh(\omega_{io} t) + B_i \sinh(\omega_{io} t)) e^{-\xi_i \omega_i t}$$

con:

$$A_i = q_i(0) \quad B_i = \frac{\dot{q}_i(0) + q_i(0)\xi_i\omega_i}{\omega_{io}} \quad \omega_{io} = \omega_i \sqrt{\xi_i^2 - 1}$$

Per esprimere le condizioni al contorno sugli spostamenti $\mathbf{u}(0)$ e sulle velocità $\dot{\mathbf{u}}(0)$ in termini di coordinate modali $q_i(0)$ e $\dot{q}_i(0)$, è sufficiente richiamare la relazione (2.49):

$$\mathbf{u}(t) = \sum_{i=1}^n \phi_i q_i(t) = \Phi \mathbf{q}(t)$$

da cui, premoltiplicando per $\phi_i^\top \mathbf{M}$, si ottiene:

$$\phi_i^\top \mathbf{M} \mathbf{u}(t) = \phi_i^\top \mathbf{M} \left(\sum_{i=1}^n \phi_i q_i(t) \right)$$

e quindi, stante l'ortogonalità dei modi di vibrare rispetto alla matrice di massa $\mathbf{M}$:

$$\phi_i^\top \mathbf{M} \mathbf{u}(t) = \phi_i^\top \mathbf{M} \phi_i q_i(t)$$

espressione che conduce alla relazione finale tra gli spostamenti $\mathbf{u}(0)$ e $q_i(0)$:

$$q_i(0) = \frac{\phi_i^\top \mathbf{M} \mathbf{u}(0)}{\phi_i^\top \mathbf{M} \phi_i}$$

Analogamente, in termini di velocità $\dot{\mathbf{u}}(0)$ e $\dot{q}_i(0)$ si ha:

$$\dot{q}_i(0) = \frac{\phi_i^\top \mathbf{M} \dot{\mathbf{u}}(0)}{\phi_i^\top \mathbf{M} \phi_i}$$

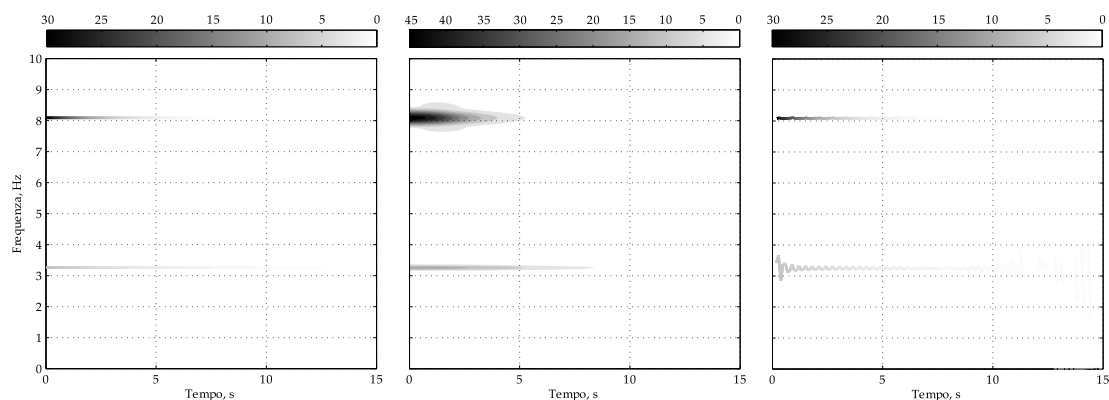


Figura 5.13: Analisi tempo-frequenza della risposta: a sinistra la soluzione analitica, al centro la trasformata Wavelet, a destra la trasformata di Hilbert-Huang.

discusse nell'Appendice C. Gli andamenti ampiezza-tempo-frequenza ottenuti sono quelli di Figura 5.13: sulla sinistra è riportata la soluzione analitica, al centro il grafico relativo alla trasformata Wavelet (costruita con la mother wavelet di Morlet complessa, $f_b = 100$ e $f_c = 2$), a destra quello corrispondente alla trasformata di Hilbert-Huang (regolarizzata secondo il metodo di Savitzky e Golay, $n_{SG} = 3$ e $l_{SG} = 1501$). La semplice analisi grafica di questi risultati testimonia come le due trasformate esaminate siano effettivamente in grado di analizzare il contenuto tempo-frequenza della storia temporale del moto, aprendo così la strada alle tecniche d'identificazione discusse nel capitolo successivo.



Bibliografia

- [5.1] M. Al-Qassab e S. Nair. “Wavelet-Galerkin method for the free vibrations of an elastic cable carrying an attached mass”. *Journal of Sound and Vibration*, 270(1):191–206, 2004.
- [5.2] K. F. Alvin, A. N. Robertson, G. W. Reich, e K. C. Park. “Structural system identification: from reality to models”. *Computers & Structures*, 81(12):1149–1176, 2003.

-
- [5.3] J. A. Demarchi e K. C. Craig. Comments on “Natural frequencies and dampings identification using Wavelet transform: application to real data”. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 17(2):483–488, 2003.
- [5.4] S. Hans, E. Ibraim, S. Pernot, C. Boutin, e C. H. Lamarque. “Damping identification in Multi-Degree-Of-Freedom system via a Wavelet-Logarithmic Decrement. Part 2: Study of a civil engineering building”. *Journal of Sound and Vibration*, 235(3):375–403, 2000.
- [5.5] T. Y. Hou, M. P. Yan, e Z. Wu. “A variant of the EMD for multi-scale data”. *Advances in Adaptive Data Analysis*, 1(4):483–516, 2009.
- [5.6] N. E. Huang e S. S. P. Shen. “Hilbert-Huang transform and its applications”, volume 5 di *Interdisciplinary Mathematical Sciences. Proceedings of the Royal Society of London. Series A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 1^a edizione, 2005.
- [5.7] N. E. Huang, Z. Shen, S. R. Long, M. C. Wu, H. H. Shih, Q. Zheng, N. C. Yen, C. C. Tung, e H. H. Liu. “The Empirical Mode Decomposition and the Hilbert spectrum for nonlinear and nonstationary time series analysis”. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 454(1971):903–995, 1998.
- [5.8] T. L. Huang, W. X. Ren, e M. L. Lou. “The Orthogonal Hilbert-Huang transform and its application in earthquake motion recordings analysis”. *14th World Conference on Earthquake Engineering, WCEE*, 2008.
- [5.9] D. N. Kaslovsky e F. G. Meyer. “Noise corruption of Empirical Mode Decomposition and its effect on instantaneous frequency”. *Advances in Adaptive Data Analysis*, 2(3):373–396, 2010.
- [5.10] G. Kerschen, A. F. Vakakis, Y. S. Lee, D. M. McFarland, e L. A. Bergman. “Toward a fundamental understanding of the Hilbert-Huang transform in nonlinear structural dynamics”. *Journal of Vibration and Control*, 14(1-2):77–105, 2008.
- [5.11] D. Kim e H. S. Oh. “EMD: a package for Empirical Mode Decomposition and Hilbert spectrum”. *The R Journal*, 1(1):40–46, 2009.
- [5.12] Y. Kopsinis e S. McLaughlin. “Improved EMD using doubly-iterative sifting and high order spline interpolation”. *EURASIP Journal on Advances in Signal Processing*, 2008(1):1–8, 2008.

-
- [5.13] C. H. Lamarque, S. Pernot, e A. Cuer. *"Damping identification in Multi-Degree-Of-Freedom system via a Wavelet-Logarithmic Decrement. Part 1: Theory"*. *Journal of Sound and Vibration*, 235(3):361–374, 2000.
- [5.14] J. Lardies e S. Gouttebroze. *"Identification of modal parameters using the Wavelet transform"*. *International Journal of Mechanical Sciences*, 44(11):2263–2283, 2002.
- [5.15] T. P. Le e P. Argoul. *"Continuous Wavelet transform for modal identification using free decay response"*. *Journal of Sound and Vibration*, 277(1-2):73–100, 2004.
- [5.16] J. Morlet, G. Arens, E. Fourgeau, e D. Glard. *"Wave propagation and sampling theory. Part 1: complex signal and scattering in multilayered media"*. *Geophysics*, 47(2):203–221, 1982.
- [5.17] G. Rilling, P. Flandrin, e P. Gonçalves. *"On Empirical Mode Decomposition and its algorithms"*. *6th IEEE/EURASIP Workshop on Nonlinear Signal and Image Processing, NSIP*, 2003.
- [5.18] F. Romeo. *"A wavelet based approach for structural-system parametric identification"*. *Tesi di dottorato - "Sapienza" Università di Roma*, 1999.
- [5.19] J. Slavič, I. I. Simonovski, e M. Boltežar. *"Damping identification using a continuous Wavelet transform: application to real data"*. *Journal of Sound and Vibration*, 262(2):291–307, 2003.
- [5.20] W. J. Staszewski. *"Identification of non-linear systems using multi-scale ridges and skeletons of the Wavelet transform"*. *Journal of Sound and Vibration*, 214(4):639–658, 1998.
- [5.21] W. J. Staszewski. *"Wavelet based compression and feature selection for vibration analysis"*. *Journal of Sound and Vibration*, 211(5):735–760, 1998.
- [5.22] J. P. Tang, D. J. Chiou, C. W. Chen, W. L. Chiang, W. K. Hsu, C. Y. Chen, e T. Y. Liu. *"A case study of damage detection in benchmark buildings using a Hilbert-Huang transform-based method"*. *Journal of Vibration and Control*, 17(4):623–636, 2011.
- [5.23] L. Wang, J. Zhang, C. Wang, e S. Hu. *"Identification of nonlinear systems through time-frequency filtering technique"*. *Journal of Vibration and Acoustics*, 125(2):199–204, 2003.
- [5.24] L. Wang, J. Zhang, C. Wang, e S. Hu. *"Time-frequency analysis of nonlinear systems: the skeleton linear model and the skeleton curves"*. *Journal of Vibration and Acoustics*, 125(2):170–177, 2003.

-
- [5.25] Z. Wu e N. E. Huasng. *"Ensemble Empirical Mode Decomposition: a Noise-Assisted Data Analysis method"*. *Advances in Adaptive Data Analysis*, 1(1):1–41, 2009.
- [5.26] J. N. Yang, Y. Lei, S. Pan, e N. Huang. *"System identification of linear structures based on Hilbert-Huang spectral analysis. Part 1: normal modes"*. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, 32(9):1443–1467, 2003.
- [5.27] J. N. Yang, Y. Lei, S. Pan, e N. Huang. *"System identification of linear structures based on Hilbert-Huang spectral analysis. Part 2: Complex modes"*. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, 32(10):1533–1554, 2003.
- [5.28] H. P. Yin, D. Duhamel, e P. Argoul. *"Natural frequencies and damping estimation using Wavelet transform of a frequency response function"*. *Journal of Sound and Vibration*, 271(3-5):999–1014, 2004.

Pagina lasciata intenzionalmente bianca.

Capitolo 6

Pseudo-Mode Index

6

La tecnica EMD descritta nel capitolo precedente viene qui utilizzata allo scopo di introdurre un nuovo indice di danno, chiamato **PMI** (*Pseudo-Mode Index*).

Nello specifico, dopo l'illustrazione di tecniche semplici d'identificazione modale che sfruttano gli IMF, si focalizza l'attenzione sulla nuova tecnica d'identificazione del danno, per la quale si effettuano sia confronti con gli altri filoni di ricerca simili per strategia, sia confronti con altri indici di danno simili per formulazione. Nell'ambito del lavoro di tesi, ci si avvale di questo indice per selezionare opportunamente il modello da adoperare nell'utilizzo della tecnica d'identificazione introdotta nella seconda parte nei casi di parametri incerti di danno.

6.1 Premessa

Nelle ultime due decadi sono state proposte in letteratura numerose tecniche d'identificazione del danno basate sui risultati di prove dinamiche; un testo di riferimento sul tema è [6.7]. Una possibile classificazione di queste tecniche, peraltro ormai ampiamente accettata, è quella proposta originariamente in [6.27], che, sulla base delle informazioni raccolte, assegna la tecnica a uno dei seguenti livelli di approfondimento:

- livello 1: presenza del danno (e.g., Unified Significance Indicator, . . .);

Livello	Presenza	Posizione	Entità	Vita residua
1	✓			
2	✓	✓		
3	✓	✓	✓	
4	✓	✓	✓	✓

Tabella 6.1: Livelli d'identificazione del danno.

- livello 2: presenza e posizione del danno (e.g., COordinate Modal Assurance Criterion, ...);
- livello 3: presenza, posizione ed entità del danno (e.g., Finite Element Model Updating, ...);
- livello 4: presenza, posizione ed entità del danno, valutazione della vita residua (e.g., Fatigue Lifetime Estimator, ...);

si veda anche la Tabella 6.1 di sintesi.

Un'altra possibile classificazione è stilabile sulla base delle grandezze utilizzate:

- categoria 1: proprietà fisiche (massa, rigidità, smorzamento);
- categoria 2: proprietà modali (frequenze naturali, modi di vibrare, smorzamento modale);
- categoria 3: caratteristiche di elaborazione del segnale (e.g., trasformata di Fourier, Wavelet o di Hilbert).

In [6.28] è presentata una review sull'identificazione del danno basata sull'uso delle frequenze naturali come parametro diagnostico strutturale; le conclusioni del lavoro sottolineano tuttavia come l'analisi delle frequenze strutturali non possa da sola essere sufficiente, in generale, per un'identificazione univoca della posizione di danneggiamenti strutturali; è sufficiente pensare, infatti, a una struttura simmetrica in cui la stessa variazione di frequenza si può ottenere per posizioni simmetriche del danno [6.17]. Il concetto è stato peraltro ampiamente discusso nella parte precedente nel discutere la formulazione della funzione obiettivo.

Un'ampia review che mette a confronto numerose tecniche di diversi livelli e categorie riportata in [6.4] e nella sua natura prosecuzione [6.29]. In quest'ultimo lavoro, in particolare, si pone l'accento sulla distinzione tra metodi d'identificazione del danno supervisionati e non: la prima classe si riferisce a metodi che utilizzano dati relativi

alla struttura sia integra sia danneggiata, come ad esempio i recenti metodi basati sulle reti neurali e sugli algoritmi genetici, alla seconda classe, cui appartiene ad esempio la control chart analysis, fanno capo tutti i metodi in cui soltanto la struttura danneggiata è studiata. Un importante punto fermo su quest'ultima classe è rilevato in [6.31]: basandosi sulla raccolta e analisi della letteratura sul tema, gli autori propongono una lista di 7 assiomi sull'identificazione dinamica del danno, il più interessante dei quali è il secondo, centrato proprio sulla possibilità che le sole registrazioni effettuate su una struttura danneggiata siano in grado di fornire informazioni sull'eventuale danneggiamento. Gli autori concludono che "the assessment of damage requires a comparison between two system states" e sottolineano pure che nei lavori in cui la diagnostica è possibile con riferimento a un solo stato, in verità si sta sempre ipotizzando a priori uno stato a monte da erigere a integro. Altre review più recenti sull'identificazione dinamica del danno sono altresì disponibili in [6.6, 30]; per le tecniche basate sulla diagnostica del danno tramite la dinamica ad alta frequenze, tecniche delle onde guidate e ultrasoniche (qui non trattate perché categoria a parte), un utile riferimento è [6.10].

Vale la pena, a questo punto, focalizzare l'attenzione sui lavori dedicati all'analisi comparativa dei vari metodi: in [6.3] è presentato uno studio comparativo sull'identificazione dinamica del danno (livello 2) per ponti a travata; nello specifico, i 6 metodi di diagnostica scelti sono confrontati tramite simulazioni numeriche e prove al vero, mostrando come la valutazione del danno sia molto difficile nei casi di segnali di risposta corrotti dal rumore o relativi a un danneggiamento lieve. Anche in [6.20] lo studio sull'identificazione dinamica del danno per un arco prototipo in muratura basato su 8 differenti metodi di valutazione (di livello 1, 2 e 3) conduce a un'analoga conclusione.

In [6.17] si pone poi l'accento sulle questioni legate alla natura inversa del problema trattato: è mostrato come l'unicità della soluzione del problema inverso di misura della posizione e dell'entità del danno in una trave curva (parabolica) doppiamente incernierata richieda lo studio di almeno tre frequenze, una in più del caso di trave rettilinea semplicemente appoggiata, ma è altresì mostrato come l'aggiunta di una quarta frequenza nel processo d'identificazione strutturale non conduca necessariamente a un risultato migliore.

Ricordando che ai fini della tesi si cerca un metodo di livello 2, ossia un metodo d'identificazione del danno in grado di fornire indicazioni sulla selezione del modello, appare chiara, quindi, l'ineluttabile assenza di un approccio risolutivo unificato; per le specificità del problema trattato, infatti, la maturità di molti metodi di letteratura si scontra con una ineludibile validità parziale. Questa considerazione, unitamente al riscontro dell'assenza in letteratura di una tecnica analoga, ha ingenerato l'idea di costruire un metodo capace di combinare le proprietà modali insite nella struttura

con le caratteristiche di elaborazione del segnale, in pratica, un metodo di categoria a cavallo tra la seconda e la terza della lista precedente, che punta a conservare i vantaggi complementari di entrambe le filosofie e, come conseguenza, a un miglioramento della sensibilità al danneggiamento.

I metodi basati sulle proprietà modali, imperniati sulle alterazioni della risposta dinamica generate dai danni, consentono interpretazioni fisicamente congrue e semplici confronti predittivi; tuttavia ci sono tre principali fonti di difficoltà riscontrabili: è richiesta una modellazione strutturale molto accurata, è necessario che il problema non sia malcondizionato e bisogna selezionare i segnali di risposta più significativi. Dall'altra parte, invece, le tecniche basate sull'elaborazione del segnale di risposta consentono un monitoraggio diretto e preciso delle modifiche tra stati danneggiati e non; lo svantaggio in questo caso è l'interpretazione fisica della fonte responsabile dei cambiamenti rilevati. Il metodo qui presentato conserva, per la sua natura auto-adattativa, i benefici delle tecniche basate sull'elaborazione del segnale di risposta e al tempo stesso contempla i contenuti in frequenza della struttura.

L'approccio è concepito per individuare le aree danneggiate a partire dalle vibrazioni libere raccolte per gli stati danneggiati e non danneggiati. Ricorrendo alle potenzialità dell'approccio tempo-frequenza EMD, si costruisce nel dominio del tempo una base i cui segnali sono multi-frequenza e si introduce quindi un indicatore di danno che confronta come l'energia di un dato segnale di risposta si ripartisce all'interno della base. Da un punto di vista operativo, questo raffronto energetico può essere egualmente visto come un confronto tra curve sperimentali estratte dai dati, le quali coincidono con i modi di vibrare solamente sotto opportune condizioni.

6.2 Identificazione modale

Nel capitolo precedente si è detto che l'EMD è un filtro non lineare capace di separare le oscillazioni veloci da quelle lente. Iterando questo processo di vagliatura, si genera un banco di filtri che decompone un dato segnale in un insieme di sub-segnali, gli IMF.

I pro e i contro del metodo sono:

- vantaggio: gli IMF (più il residuo) costituiscono una base completa e guidata dai dati (auto-adattativa);
- svantaggio: le oscillazioni lente sono interpolate, e quindi approssimate (motivo per cui si parla di *empirical* mode decomposition).

Un'ulteriore svantaggio potrebbe essere la non-ortogonalità, in generale, della base di IMF, ma, come si è detto, questo difetto può essere superato post-processando gli IMF con la tecnica di Gram-Schmidt, ottenendo gli OIMF.

Circa il significato fisico degli IMF, in [6.13] è precisato che gli IMF sono coerenti con la fisica del sistema e rappresentano le componenti oscillatorie contenute nel segnale. Pertanto, per sistemi lineari, il significato degli IMF dovrebbe essere, in principio, chiaro: dato un segnale di risposta (spostamento, velocità, accelerazione), gli IMF corrispondono, a meno di un fattore di scala, alle storie temporali (spostamento, velocità, accelerazione) delle coordinate modali. Sarebbe a dire:

$$u_i(t) = \sum_{j=1}^n \phi_{ij} q_j(t) \quad i = 1, \dots, n \quad n = \text{dof} \quad (6.1)$$

$$\text{IMF}_{ik}(t) = \phi_{ij} q_j(t) \quad i, j = 1, \dots, n \quad k = n - (j - 1)$$

e analoghe nel caso di velocità o accelerazione (basta sostituire $u_i(t)$ e $q_j(t)$ con $\dot{u}_i(t)$ e $\dot{q}_j(t)$, nel primo caso, e con $\ddot{u}_i(t)$ e $\ddot{q}_j(t)$, nel secondo caso).

Sulla base di queste relazioni, se ne conclude che, noti gli IMF, le proprietà modali possono essere identificate mutuando le tecniche standard utilizzate per i sistemi SDoF. In particolare, con riferimento alla Figura 6.1, le proprietà modali possono desumersi operando nel dominio del tempo (ovvero sulla IRF):

- la frequenza (smorzata) è valutata tramite la distanza tra gli attraversamenti per lo zero $f_{dj} = 1/T_{dj,12}$; data l'indipendenza dalle coppie 1, 2 il risultato può ottenersi più accuratamente tramite un'operazione di regressione;
- lo smorzamento è valutato con il decremento logaritmico $\xi_j = \delta_j / ((2\pi)^2 + \delta_j^2)^{1/2}$, essendo $\delta_j = \ln(h_{j1}/h_{j2})$; circa le coppie resta valido il commento riportato per il caso della frequenza;
- i modi di vibrare ϕ_{ij} sono valutati tramite il rapporto tra gli RMS delle IRF relative a punti i diversi. In verità, la relazione (6.1)₂ assicura che, scelto arbitrariamente un punto di riferimento I (in cui $\phi_{Ij} = 1$), i modi sono ottenibili come $(\phi_{ij}/\phi_{Ij}) = (\text{IMF}_{ik}/\text{IMF}_{Ik})$, con $k = n - (j - 1)$; tuttavia, ai fini delle applicazioni che seguono e anche perché questa relazione è molto suscettibile a piccoli shift temporali delle risposte, è preferibile riferirsi agli RMS, cfr. (2.7);

oppure nel dominio delle frequenze (ovvero sulla FRF):

- la frequenza smorzata f_{dj} è valutata in corrispondenza del picco della FRF;
- lo smorzamento è valutato con il metodo della semi-ampiezza $\xi_j = (f_{j2} - f_{j1}) / (2f_{dj})$;

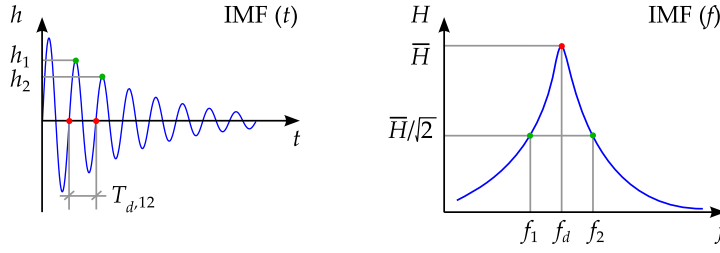


Figura 6.1: Tecniche d'identificazione dinamica sulla base degli IMF (si omettono, per semplicità, i pedici delle grandezze).

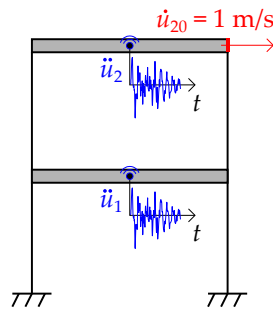


Figura 6.2: Sistema di eccitazione e registrazione.

- i modi di vibrare ϕ_{ij} sono valutati tramite il rapporto tra i picchi delle FRF relative a punti i diversi $\phi_{ij}/\phi_{Ij} = \bar{H}_{ij}/\bar{H}_{Ij}$, essendo I un punto di riferimento arbitrariamente scelto (in cui $\phi_{Ij} = 1$).

Si precisa come la differenza tra i metodi qui proposti e quello di letteratura di cui al § 5.2.3 risieda nella strategia risolutiva: qui si utilizzano le proprietà *globali* dei sub-segnali, mentre nei lavori citati si opera sulle proprietà *locali* e si esegue poi un fitting sulle storie temporali.

6.2.1 Esempio

Si analizza nuovamente il sistema a 2 gradi di libertà di Figura 5.10; per una descrizione completa delle caratteristiche dello stesso si veda quanto già riportato al § 5.2.3.1.

Eccitando il sistema con un impulso unitario sulla massa in sommità e analizzando tramite la tecnica EMD le risposte di entrambi i gradi di libertà (frequenza di campionamento di 5 kHz), cfr. Figura 6.2, si ottiene quanto riportato in Figura 6.3.

La semplice analisi grafica di questi risultati mostra come in questo caso gli IMF coincidano effettivamente con le storie temporali delle coordinate modali (a eccezione di trascurabili zone terminali); peraltro, con riferimento alla risposta del secondo grado

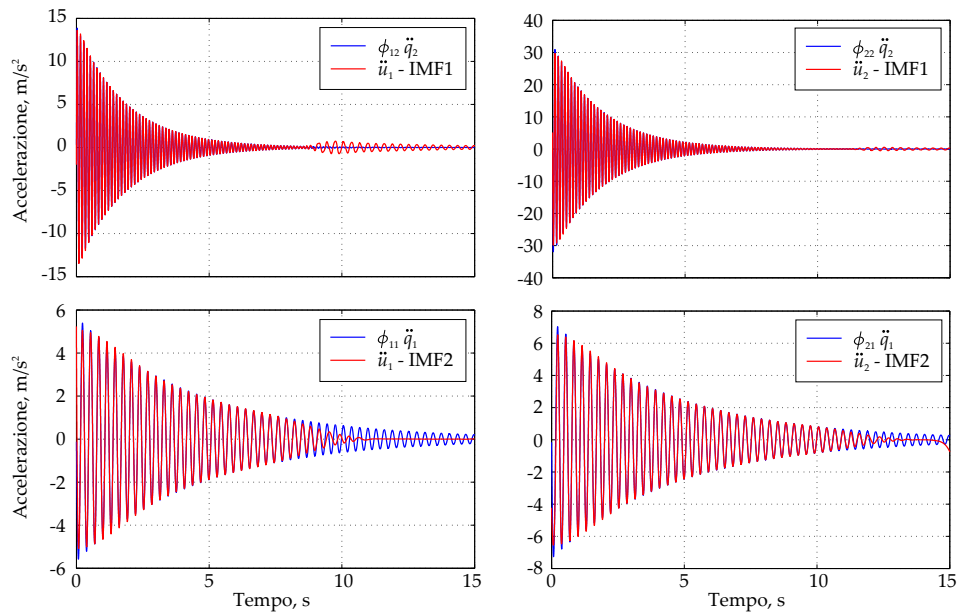


Figura 6.3: Confronto tra gli IMF e le storie temporali delle coordinate modali.

di libertà, un risultato identico era stato ottenuto al § 5.2.3.1. A riprova di questo, se si applicano le due tecniche d'identificazione espresse in precedenza (basate sull'analogia con il caso SDoF) si ottiene un'elevata corrispondenza tra le grandezze analitiche e quelle identificate, tanto nel dominio del tempo, quanto in quello delle frequenze, cfr. Tabella 6.2; soltanto per i due fattori di smorzamento si registra un errore elevato quando l'identificazione è operata nel dominio delle frequenze, ma questa circostanza è più facilmente imputabile alle approssimazioni del metodo della semi-ampiezza stesso, più che a segnali corrotti (come dimostra il fatto che gli stessi segnali misurano propriamente lo smorzamento se si opera nel dominio del tempo).

	Analitiche		Identificate con EMD			
			SDoF (frequenza)		SDoF (tempo)	
	1° modo	2° modo	1° modo	2° modo	1° modo	2° modo
f_d , Hz	3.25	8.09	3.27	8.07	3.25	8.08
ξ , %	1.08	1.07	1.52	1.15	1.07	1.07
ϕ_{1i}	0.77	-0.43	0.72	-0.44	0.76	-0.44
ϕ_{2i}	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00

Tabella 6.2: Identificazione modale tramite EMD.

6.3 Identificazione del danno

La tecnica EMD mostra frequentemente dei fenomeni di *mode mixing*. A causa di questi fenomeni viene meno l'ipotesi alla base delle succitate tecniche SDoF per l'identificazione modale, ovvero l'ipotesi per la quale gli IMF corrispondono, a meno di un fattore di scala, alle storie temporali delle coordinate modali. L'idea alla base del metodo proposto è che, siccome in questa sede si intende utilizzare la tecnica EMD ai fini dell'identificazione del danno, piuttosto che del modello modale, la base degli IMF continua a conservare la sua validità anche in presenza di fenomeni di mode mixing, e, anzi, costituisce una base privilegiata; questo concetto di adeguatezza della base è analogo a quello discusso in [6.24] con riferimento a un segnale bitonale e verrà trattato al § 6.3.2. Da un punto di vista operativo il metodo prevede un utilizzo energetico della base del tutto analogo agli altri metodi di letteratura non basati su un modello numerico di confronto: il danno è identificato tramite un quadro di controllo della distribuzione di una o più caratteristiche *significative* della risposta, ove nuovi dati incoerenti con quelli *storici* permettono l'individuazione del danno [6.1]. Per la natura energetica del metodo, appare immediato sviluppare la formulazione con riferimento alla versione ortogonale degli IMF, gli OIMF; a scopo illustrativo, tuttavia, le elaborazioni che seguono verranno presentate con riferimento tanto alla EMD quanto alla OEMD.

Detto $i = 1, \dots, N$ il numero di sensori (i punti di misura) e detto $j = 1, \dots, M$ il numero di IMF (o OIMF) più il residuo (i modi intrinseci della base), si valuta dapprima la potenza media dei sub-segnali della base:

$$P_{ij} = \frac{1}{T_r} \int_{t_0}^{T_r} \text{IMF}_{ij}(t)^2 dt \quad \text{o} \quad P_{ij} = \frac{1}{T_r} \int_{t_0}^{T_r} \text{OIMF}_{ij}(t)^2 dt \quad (6.2)$$

e in seguito si costruiscono M pseudo-modi di N componenti φ_{ij} :

$$\varphi_{ij} = \sqrt{P_{ij}} \quad (6.3)$$

In altri termini, si definiscono come pseudo-modi le curve costruite a partire dai valori RMS dei sub-segnali. Sulla base di quanto già detto sulla possibilità di mutuare le tecniche SDoF ai fini dell'identificazione operando con l'EMD, è quindi evidente come l'unico caso in cui gli pseudo-modi coincidono con i modi propriamente detti è quello in cui essi sono derivati a partire da IMF mono-frequenza (il che giustifica l'appellativo *pseudo*). Si sottolinea come l'utilizzo degli OIMF, anche nel caso in cui questi siano dedotti a partire da IMF mono-frequenza, è di per sé condizione sufficiente perché gli pseudo-modi non collassino nei modi di vibrare (i quali, infatti, sono ortogonali soltanto rispetto alle matrici di massa e rigidezza, oltre che di smorzamento, nel caso in cui sia uno smorzamento classico).

Garantendo che il sistema di eccitazione e di misura mantenga la stessa configurazione passando dal caso integro a quello danneggiato, si introduce quindi un nuovo indice di danno, denominato **PMI** (*Pseudo-Mode Index*), basato sul confronto tra gli pseudo-modi non danneggiati e quelli danneggiati:

$$\text{PMI}(i) = \frac{|\varphi_{ij}^d - \varphi_{ij}^u|}{\varphi_{ij}^u} \quad (6.4)$$

con J il pseudo-modo per cui si ha la massima differenza di potenza:

$$\Delta P(j) = \left| \sum_{i=1}^N P_{ij}^d - \sum_{i=1}^N P_{ij}^u \right| \quad (6.5)$$

Il danno è quindi identificato in corrispondenza del picco dell'indice $\text{PMI}(i)$; un valore costante della funzione indica invece che la struttura si è mantenuta integra, ovvero una mera operazione di scala tra φ_{ij}^u e φ_{ij}^d . La relazione che fornisce il pseudo-modo più significativo necessita tuttavia una precisazione: se il numero di IMF della base è stato fissato a priori (cfr. § 5.1) e il pseudo-modo selezionato J risulta essere il residuo, allora si rende necessario aumentare le dimensioni della base, ovvero il numero di IMF, dato che altrimenti il confronto riguarderebbe componenti non compiutamente filtrate dall'EMD.

L'indicatore di danno proposto, qui introdotto su base energetica, può altresì pensarsi come un'estensione agli pseudo-modi delle analoghe definizioni sviluppate in letteratura con riferimento ai modi di vibrare. Questo concetto verrà discusso nelle pagine che seguono.

Riassumendo, la formulazione proposta può sintetizzarsi nei seguenti quattro step:

- registrare i segnali di risposta delle oscillazioni libere della struttura danneggiata e non;
- analizzare questi segnali con la tecnica EMD, ottenendo i sub-segnali IMF;
- estrarre dal set di sub-segnali le forme pseudo-modali;
- confrontare gli pseudo-modi relativi alla struttura danneggiata e non;

e appare evidente come il metodo, essendo basato sulla risposta, ha il notevole vantaggio di non richiedere alcun modello numerico di confronto, circostanza che spesso rende il processo d'identificazione del danno proibitivo nelle applicazioni al vero.

L'esempio che segue ha lo scopo di enfatizzare la differenza che intercorre tra modi e pseudo-modi.

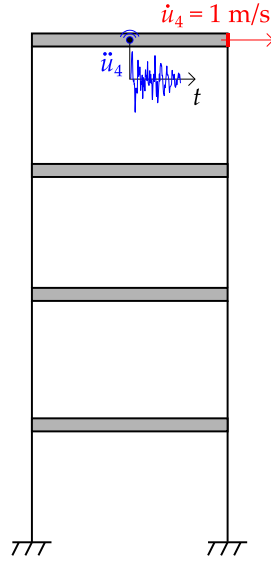


Figura 6.4: Sistema di eccitazione e registrazione.

6.3.1 Esempio

Si analizza il sistema a 4 gradi di libertà introdotto al § 3.6.3, cfr. Figura 3.1. In particolare, si studia il caso imperturbato:

$$M_i = 1\text{kg} \quad K_i = 1800\text{N/m} \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad (6.6)$$

e si ammette uno smorzamento classico (cfr. (2.48)) arrestato ai soli primi due termini, ossia una matrice di smorzamento siffatta:

$$\mathbf{C} = a_0\mathbf{M} + a_1\mathbf{K} \quad (6.7)$$

con:

$$a_0 = 0.3150 \quad a_1 = 0.0003 \quad (6.8)$$

Il sistema è eccitato applicando un impulso unitario in sommità e la registrazione è effettuata sullo stesso grado di libertà (frequenza di campionamento di 5 kHz), cfr. Figura 6.4. Il primo IMF fornito dalla tecnica EMD per tale segnale di risposta è quello riportato in Figura 6.5.

In questo caso, diversamente da quanto riscontrato nell'esempio illustrato al § 6.2.1, anche la semplice analisi grafica dell'IMF mostra come sia presente più di un contenuto in frequenza; il concetto è chiarito dalla Figura 6.6, in cui si apprezza come il primo IMF, che in teoria dovrebbe coincidere con la storia temporale della quarta coordinata modale (la più veloce), restituisce dapprima (tra 0 e 1 secondo) una somma del terzo e del quarto modo di vibrare e dopo (tra 1 e 5 secondi) volge alla seconda

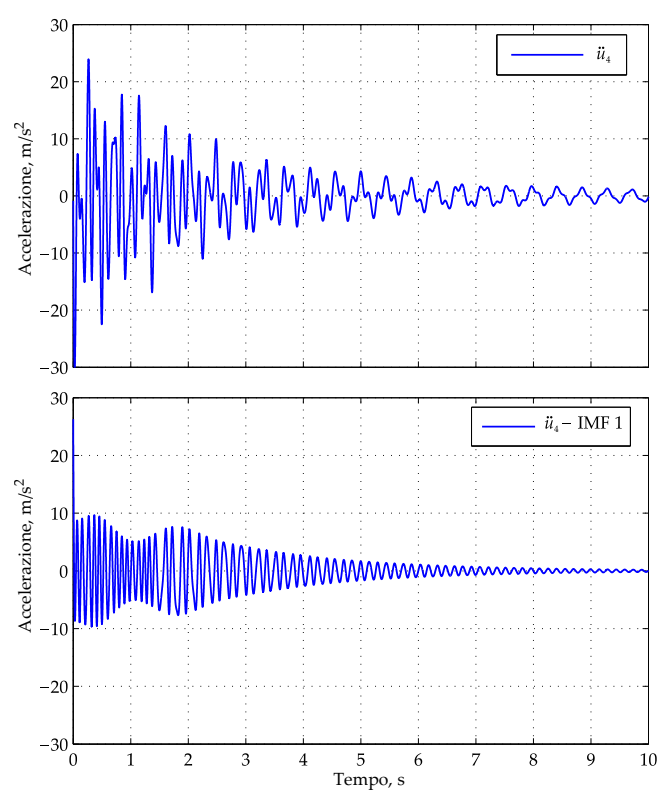


Figura 6.5: Analisi del segnale con l'EMD: in alto l'accelerazione registrata, in basso il corrispondente primo IMF.

coordinata modale. Il primo fenomeno di interazione è imputabile alla vicinanza tra le frequenze dei modi considerati (il terzo e il quarto), mentre il secondo fenomeno di transizione alla maggiore ampiezza del secondo modo rispetto al terzo nel range analizzato (il terzo modo è più veloce e pertanto decade prima, cfr. Nota 3 di pag. 145).

Lo stesso contenuto tempo-frequenza può essere rilevato per tramite delle trasformate Wavelet e di Hilbert descritte nel capitolo precedente. I risultati ottenuti utilizzando la mother wavelet di Morlet complessa ($f_b = 7$ e $f_c = 1.9$) per la trasformata Wavelet, e il metodo di regolarizzazione di Savitzky e Golay ($n_{SG} = 1$ e $l_{SG} = 3001$) per la trasformata di Hilbert, sono quelli riportati in Figura 6.7. Con riferimento alle frequenze del modello (evidenziate nei grafici per tramite di quattro linee rosse, cfr. § 3.6.3) appare evidente come, al netto degli effetti di bordo (parte in basso a sinistra del dominio tempo-frequenza), la trasformata Wavelet sia in grado di descrivere congruentemente i due fenomeni (di interazione e di transizione) descritti in precedenza (la linea in blu rappresenta il limite inferiore utilizzato nell'analisi tempo-frequenza: stante la relazione (5.36), infatti, per valori esigui della frequenza il coefficiente di scala tende a divergere, ingenerando problemi computazionali). Poiché, per definizione, la trasformata di Hilbert è in grado di fornire una sola ampiezza per un fissato istante temporale, in questo secondo caso si riesce a cogliere molto bene il fenomeno di transizione, mentre quello di interazione risulta essere completamente celato (in pratica, la trasformata restituisce solo l'ampiezza di intensità maggiore).

Questi risultati mettono in evidenza i succitati fenomeni di *mode mixing* e chiariscono come non vi sia garanzia che l'analisi con l'EMD conduca in tutti i casi all'identificazione del modello modale della struttura. In altri termini, mentre con il sistema a due gradi di libertà del § 6.2.1 l'applicazione della tecnica EMD conduceva ai modi di vibrare, in questo caso si possono ottenere soltanto delle curve sperimentali, quelle precedentemente battezzate come pseudo-modi.

6.3.2 Approfondimenti sul metodo PMI

In forma induttiva, il metodo PMI può essere così introdotto. In [6.11] è presentato un approccio per l'identificazione del danno basato sulla trasformata Wavelet di risposte relative a sistemi eccitati armonicamente, mentre in un lavoro successivo [6.18] è riportata una disamina più dettagliata sull'utilizzo della trasformata Wavelet in ambito diagnostico strutturale. Tuttavia, studi recenti [6.26], sia numerici sia sperimentali, dedicati all'identificazione dinamica del danno in un elemento strutturale semplice (una mensola in acciaio) e basati sull'analisi dei modi vibrare con la trasformata Wavelet, mostrano da una parte la difficoltà nel calibrare opportunamente la trasformata Wavelet, circostanza già enfatizzata nell'introdurre la Wavelet), e dall'altra la possibilità che il

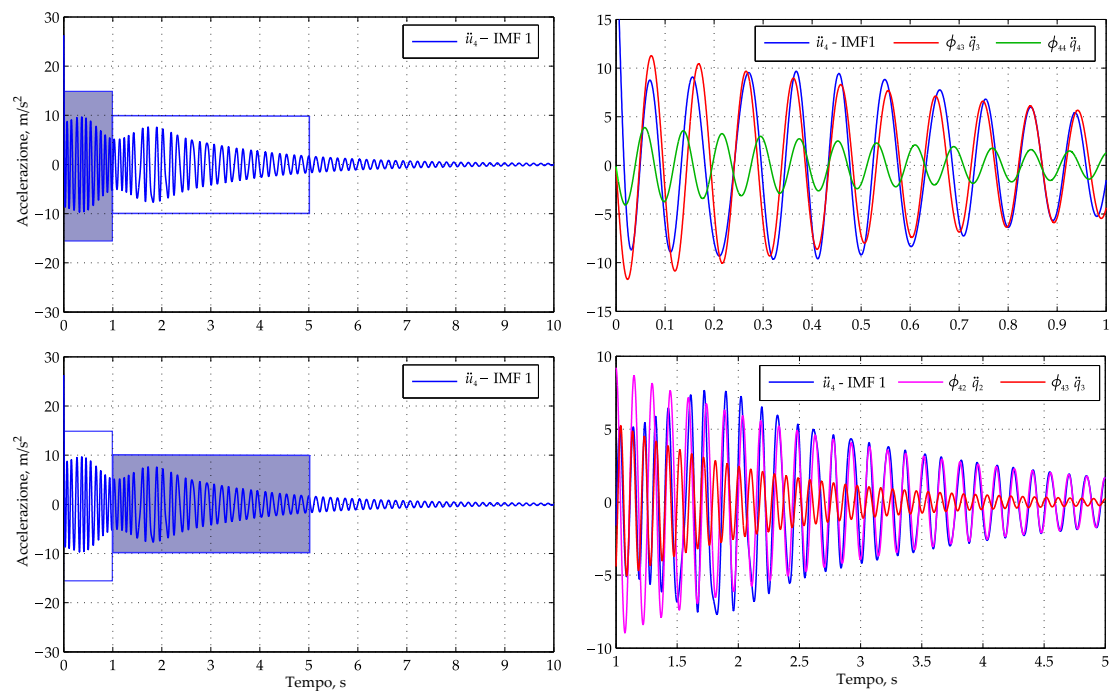


Figura 6.6: Confronto tra il primo IMF e le storie temporali delle coordinate modali.

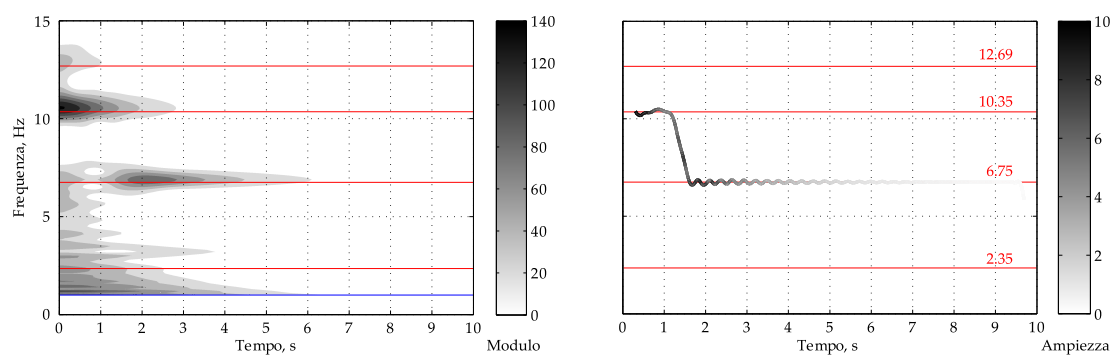


Figura 6.7: Analisi tempo-frequenza dell'IMF di Figura 6.5: a sinistra la trasformata Wavelet, a destra quella di Hilbert.

metodo cada in difetto per danno lieve, anche nel caso di settaggio congruo. In altri termini, anche un'analisi tempo-frequenza efficace come la Wavelet non sembra di per sé capace di colmare le lacune già discusse in precedenza.

Per questa ragione, l'indice introdotto per l'identificazione del danno strutturale utilizza un approccio pseudo-modale piuttosto che modale, che prova a massimizzare le informazioni tempo-frequenza del segnale. Alla base della procedura vi è, infatti, l'utilizzo dell'EMD per derivare una base privilegiata sulla quale proiettare la risposta strutturale, ma questa proiezione non conduce, in generale, ai modi di vibrare della struttura. Più precisamente, l'EMD viene applicata a tutte le risposte misurate al fine di estrarre un insieme di funzioni guidate dai dati, gli IMF o gli OIMF, quest'ultimi ottenibili tramite il processo di Gram-Schmidt; queste basi auto-adattive vengono quindi utilizzate per eseguire un confronto tra la struttura danneggiata e non danneggiata, cercando di individuare e localizzare il danno per tramite di curve sperimentali, gli pseudo-modi.

Per illustrare la natura di queste curve è utile riferirsi allo schema di Figura 6.8. Il metodo PMI è destinato allo studio delle vibrazioni libere, quindi la risposta dinamica del sistema è governata dalle sole proprietà della struttura (le condizioni iniziali giocano il ruolo di un fattore di scala); in altri termini, l'andamento teorico nello spazio ampiezza-tempo-frequenza è quello esemplificato in figura con riferimento a un sistema a quattro gradi di libertà (cfr. le linee a frequenza costante e intensità decrescente nel tempo, in misura tanto più grande quanto più grande è la frequenza), ovvero il ben noto andamento oscillatorio a decadimento esponenziale (cfr. Nota 3 di pag. 145). D'altronde, come si è già discusso in precedenza, gli IMF posseggono il contenuto in frequenza della struttura, ma presentano fenomeni di transizione (passaggio dalla frequenza più veloce a minore ampiezza a quella più lenta a maggiore ampiezza) e di interazione (le oscillazioni relative a frequenze prossime non sono separate) che forniscono una localizzazione *diagonale* a blocchi, cfr. i riquadri di Figura 6.8. Questo tipo di decomposizione tende a operare esattamente nella direzione prefissata per il metodo, quella di massimizzare le informazioni tempo-frequenza del segnale, ovvero aumentare la sensibilità dei confronti basati sui modi di vibrare. Si precisa però che, mentre i modi di vibrare sono una proprietà della struttura, gli pseudo-modi dipendono anche dal punto di applicazione dell'eccitazione, che ai fini del metodo deve essere lo stesso per la struttura integra e per quella danneggiata. Per quanto riguarda l'ortogonalizzazione, la localizzazione tempo-frequenza continua ad avere la forma diagonale descritta, cfr. § 5.1.3; l'effetto è però la garanzia che l'energia contenuta negli OIMF sia la stessa del segnale di partenza.

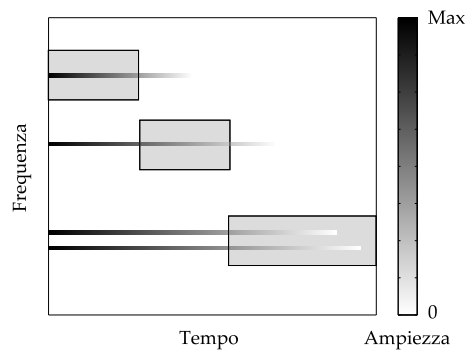


Figura 6.8: Localizzazione tempo-frequenza del primo IMF.

6.3.3 Confronto con altri filoni di ricerca

Appare utile confrontare la definizione dell'indicatore PMI con le altre principali filosofie d'identificazione del danno basate sull'EMD già sviluppate in letteratura.

In un primo approccio, quello proposto in [6.32], la tecnica EMD è utilizzata per individuare l'istante in cui si verifica il danneggiamento; uno studio simile basato sull'utilizzo dell'EMD e della trasformata Wavelet è riportato in [6.15]. Sulla stessa scia si pone il lavoro [6.5], in cui l'EMD è usata in concomitanza con il metodo Vector AutoRegressive Moving Average. Il principale svantaggio di questi metodi è che richiedono un monitoraggio in continuo, giacché l'ipotesi molto stringente alla base è che il danneggiamento si verifichi durante la registrazione.

Una seconda proposta [6.19] è quella che prevede l'utilizzo dei diagrammi tempo-frequenza e tempo-energia degli IMF relativi alle onde viaggianti per identificare il danno in elementi strutturali di tipo trave o piastra attraverso l'analisi dei tempi di percorrenza delle onde dirette e di quelle riflesse a opera del danno e delle condizioni al contorno.

Un'altra classe di lavori prevede di utilizzare l'EMD in un approccio misto, ossia in concomitanza con altre tecniche di elaborazione del segnale; tra questi si segnala [6.9] in cui si adopera l'EMD in concomitanza con la trasformata Wavelet e l'utilizzo di reti neurali artificiali.

Un altro filone di ricerca [6.2] è quello in cui gli IMF sono usati per implementare un metodo energetico d'identificazione del danno. In [6.22] la tecnica è validata sperimentalmente per l'identificazione di piccole fessure in mensole tubolari d'acciaio, mostrando come il metodo sia particolarmente sensibile al danno; un'ulteriore validazione sperimentale del metodo è riportata in [6.23], e anche in questo caso i risultati sperimentali testimoniano la validità del metodo proposto.

Apparentemente, questi lavori prevedono tutti un approccio molto simile a quello

qui presentato, ma, tuttavia, le differenze esistenti con l'indicatore PMI sono significative:

- l'approccio di letteratura usa l'EMD, l'indice PMI è pensato con riferimento all'OEMD;
- l'approccio di letteratura utilizza il primo IMF, l'indice PMI l'OIMF più significativo (in termini energetici);
- nell'approccio di letteratura la selezione del primo IMF richiede l'utilizzo di un filtro passa-banda, l'indice PMI non richiede nessun filtro in frequenza;

in altre parole, nei succitati articoli si confrontano, *de facto*, i modi, mentre la tesi propone di confrontare delle curve, gli pseudo-modi, desunte proiettando su una base modale intrinseca diversa da quella modale propriamente detta. Si precisa che in [6.21] l'ipotesi di filtraggio presente nel metodo di letteratura è rimossa e si guarda a più IMF, al primo e al secondo sostanzialmente, ma la selezione è sviluppata in pratica per tentativi, così come la base di riferimento è ancora quella dell'EMD. Infine, nel recente lavoro [6.14] è mostrato come anche un'analisi dello spettro della HHT permetta di identificare correttamente il danno: l'approccio appare, tuttavia, qualitativo più che quantitativo, oltre che meno speditivo di quello qui presentato.

6.3.4 Confronto con altri indici di danno

Gli indici di danno basati sull'impiego delle forme modali hanno attirato grande attenzione fin dai primi anni ottanta. Il concetto basilare è quello di individuare e localizzare i danni affidandosi a cambiamenti, tra stati danneggiati e non danneggiati, delle forme modali o loro derivate. Com'è noto, le derivate dei modi di vibrare (e.g., le curvature modali), sono più sensibili al danneggiamento, ma al tempo stesso più difficili da misurare. Le analisi effettuate nella presente tesi concernono i modi di vibrare, fermo restando che, per com'è stata dedotta, la strategia risolutiva proposta è di immediata estensione al caso di derivate delle forme modali.

Tra gli indici di danno di letteratura basati sul confronto tra i modi di vibrare della struttura danneggiata e non si possono annoverare i seguenti due indici, ormai considerabili come classici:

- in [6.8] è introdotto l'indice **RD** (*Relative Difference*), basato sul confronto tra i modi di vibrare non danneggiati ϕ_{ij}^u e i modi danneggiati ϕ_{ij}^d , intesi entrambi come modi normalizzati a massa unitaria. Detto N il numero di sensori ed L il numero di

modi vibrare considerati, l'indice è definito come:

$$RD(ij) = \frac{\phi_{ij}^u - \phi_{ij}^d}{\phi_{ij}^u} \quad i = 1, \dots, N \quad j = 1, \dots, L \quad (6.9)$$

e il danno è stimato in corrispondenza del sensore i in cui la funzione RD assume il suo valore (assoluto) massimo;

- in [6.16] è definito l'indice **COMAC** (*COordinate Modal Assurance Criteria*):

$$COMAC(i) = \frac{\left(\sum_{j=1}^L |\phi_{ij}^d \phi_{ij}^u| \right)^2}{\sum_{j=1}^L \left(\phi_{ij}^d \right)^2 \sum_{j=1}^L \left(\phi_{ij}^u \right)^2} \quad (6.10)$$

ove il danno è stimato in corrispondenza del sensore i in cui la funzione $COMAC$ assume il suo valore minimo. Anche in questo caso l'indicatore è da intendersi riferito ai modi normalizzati a massa unitaria.

Vale la pena sottolineare che, mentre l'indicatore RD è una funzione di due variabili, ossia si presenta come una misura selettiva di un dato modo (giacché privilegia il modo j in cui la funzione $RD(ij)$ assume il suo valore (assoluto) massimo), con il $COMAC$ si ha una misura complessiva, che comprende tutti i modi di vibrare (ovvero quelli disponibili, pensando ad applicazioni al continuo e al vero).

Ricordando la definizione fornita per il PMI (6.4), appare evidente come questo indice possa anche ottenersi sostituendo i modi di vibrare con gli pseudo-modi nella relazione dell'indice RD ; infatti, la presenza del valore assoluto nel PMI equivale alla ricerca del massimo in valore assoluto per l' RD . Inoltre, anche l'indice PMI appare come una misura selettiva, seppure questa selezione sia effettuata non per mera ricerca del massimo valore assoluto della funzione $RD(ij)$, ma imponendo un criterio di scelta energetico.

Per analogia con la dicotomia misura selettiva/complessiva riscontrata per gli indici RD e $COMAC$ con riferimento ai modi di vibrare, anche per gli pseudo-modi appare utile introdurre (artatamente) una misura complessiva da affiancare a quella selettiva predisposta dal PMI . Allo scopo, la definizione dell'indice $COMAC$ è estesa agli pseudo-modi, sostituendo questi ultimi ai modi e ottenendo un indice nel seguito denominato **PCOMAC** (*Pseudo COordinate Modal Assurance Criteria*):

$$PCOMAC(i) = \frac{\left(\sum_{j=1}^L \varphi_{ij}^d \varphi_{ij}^u \right)^2}{\sum_{j=1}^L \left(\varphi_{ij}^d \right)^2 \sum_{j=1}^L \left(\varphi_{ij}^u \right)^2} \quad (6.11)$$

ove il modulo è stato cassato giacché ininfluenza (gli pseudo-modi sono quantità definite positive).

Tipo di misura	Modi	Pseudo-modi
Selettiva	RD(ij)	PMI(i)
	$\frac{\phi_{ij}^u - \phi_{ij}^d}{\phi_{ij}^u}$	$\frac{ \phi_{ij}^d - \phi_{ij}^u }{\phi_{ij}^u}$
		$(J = \arg \max \Delta P(j),$ $\Delta P(j) = \sum_{i=1}^N P_{ij}^d - \sum_{i=1}^N P_{ij}^u)$
Complessiva	COMAC(i)	PCOMAC(i)
	$\frac{(\sum_{j=1}^L \phi_{ij}^d \phi_{ij}^u)^2}{\sum_{j=1}^L (\phi_{ij}^d)^2 \sum_{j=1}^L (\phi_{ij}^u)^2}$	$\frac{(\sum_{j=1}^M \phi_{ij}^d \phi_{ij}^u)^2}{\sum_{j=1}^M (\phi_{ij}^d)^2 \sum_{j=1}^M (\phi_{ij}^u)^2}$

Tabella 6.3: Confronto della tecnica PMI con le altre di letteratura.

Una sintesi delle quattro tecniche appena descritte è riportata in Tabella 6.3.

6.3.5 Esempio pilota

Si analizza il sistema a 4 gradi di libertà (Figura 3.1) già utilizzato in ambito del problema diretto, al § 3.6.3, con riferimento alla soluzione al primo ordine, e al § 3.7.4, per la soluzione al second'ordine.

Il sistema è caratterizzato dai seguenti valori di massa, rigidezza e smorzamento:

$$\begin{cases} M_i = 1\text{kg} & i = 1, 2, 3, 4 \\ K_i = 1800\text{N/m} & i = 1, 2, 4 \\ K_3 = 1800(1 - \theta)\text{N/m} & \theta : p_\theta(\theta) = \mathcal{N}(\mu_\theta, \sigma_\theta^2) \\ \mathbf{C} = a_0\mathbf{M} + a_1\mathbf{K} & a_0 = 0.3150, a_1 = 0.0003 \end{cases} \quad (6.12)$$

con $p_\theta(\theta)$ funzione di densità di probabilità della variabile θ .

Dati due set di misure sperimentali, l'uno relativo allo stato integro ($\theta = 0$), l'altro riferito a quello danneggiato ($\theta \neq 0$), si intende nell'ordine:

- applicare il metodo PMI di cui al § 6.3 per localizzare il danno;
- utilizzare la tecnica d'identificazione sintetizzata in Figura 4.1 per misurarne l'entità.

Per la posizione $\theta = 0$ nello stato integro, lo scenario non danneggiato risulta avere sempre carattere deterministico (ipotesi semplificativa, ma giustificata dal fatto che la

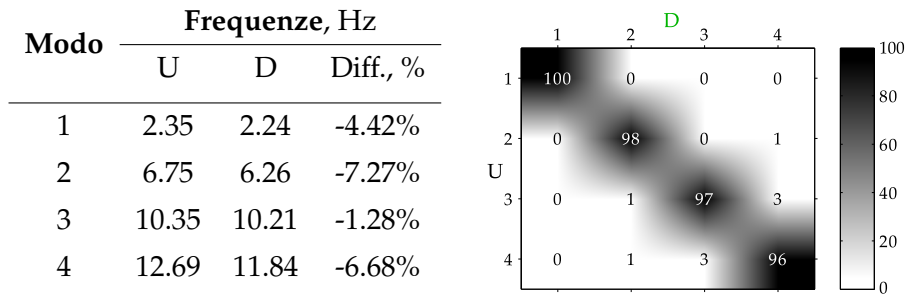


Tabella 6.4: Confronto tra i casi danneggiato (D) e non (U): variazione delle frequenze e matrice del MAC.

procedura routinaria è sempre la stessa e quindi l'effetto della componente stocastica si può apprezzare con riferimento allo stato danneggiato); per quello danneggiato, si considerano invece i due casi già utilizzati nell'ambito del problema diretto: un caso 1, deterministico, ove il parametro ha $\mu_\theta \neq 0$, $\sigma_\theta^2 = 0$; e un caso 2, aleatorio, con $\mu_\theta \neq 0$, $\sigma_\theta^2 = (0.05 \mu_\theta)^2$.

6.3.5.1 Posizione del danno

Per verificare la capacità dell'indice PMI di localizzare il danno, si considera il seguente scenario:

$$\mu_\theta = 0.3 \implies K_3^d = 1800(1 - 0.3) = 1200 \text{ N/m} \quad (6.13)$$

ovvero una riduzione di un terzo della rigidità del terzo piano del telaio (per evitare un appesantimento computazionale e dell'esposizione, è considerato quest'unico scenario di danno, assunto, quindi, come campione rappresentativo degli stati non integri).

Le variazioni indotte da tale scenario sull'autosoluzione analitica sono quelle riportate in Tabella 6.4: a fronte di una riduzione del 33 % della rigidità del terzo piano, le frequenze si riducono al più del 7 % e i modi di vibrare hanno un valore del MAC diretto (cfr. la diagonale della matrice del MAC) che si discosta al più del 4 % dall'unità, e valori del MAC incrociato che evidenziano una quasi-ortogonalità¹.

Per localizzare il danno, l'indice PMI confronta le risposte strutturali relative allo stato integro e quello danneggiato; è quindi necessario stabilire un sistema di eccitazio-

¹Significato della matrice del MAC: nel Capitolo 4 si è sottolineato che, non essendo gli autovettori scalati rispetto alla matrice di massa o alla matrice di rigidità, il MAC è un controllo di qualità, non di ortogonalità. In questo caso, però, essendo la matrice di massa del sistema diagonale e composta da elementi tutti eguali, il MAC può essere interpretato sia come un controllo di qualità, sia come un controllo di ortogonalità.

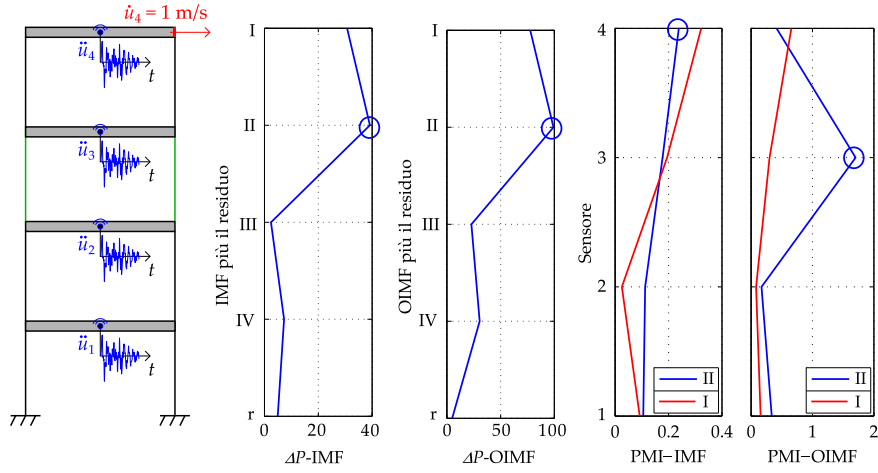


Figura 6.9: Identificazione del danno con il metodo PMI.

ne e di acquisizione. In questo esempio si è scelto di eccitare la struttura tramite un impulso unitario sulla sommità e registrare le accelerazioni di tutti i gradi di libertà ((frequenza di campionamento di 5 kHz), cfr. schema a sinistra in Figura 6.9).

I risultati ottenuti applicando la tecnica PMI, cfr. § 6.3, sono quelli riportati nella stessa Figura 6.9: il secondo e il terzo grafico mostrano che lo pseudo-modo selezionato è il secondo sia utilizzando gli IMF sia adoperando gli OIMF, mentre i due grafici sulla destra provano come soltanto l'utilizzo degli OIMF, ovvero della versione ortogonale dell'EMD, conduce a una corretta identificazione del piano danneggiato. In questi ultimi due grafici sono illustrati anche gli andamenti dell'indice PMI ottenuti considerando il primo pseudo-modo: appare evidente come il corretto funzionamento della tecnica richieda un'opportuna selezione dello pseudo-modo.

Il confronto con le altre tecniche d'identificazione del danno introdotte in precedenza, vedi Tabella 6.3, è riportato in Figura 6.10. Nonostante la semplicità dell'esempio si evince la necessità di utilizzare una tecnica d'identificazione robusta (si precisa che il valore dell'indice RD corrispondente al secondo modo, terzo dof, è stato posto unitario perché relativo a una componente inizialmente nulla): dei metodi riportati, infatti, soltanto il PMI nella versione OIMF e il PCOMAC nella versione IMF sono in grado di selezionare correttamente il danno; in un'altra applicazione del metodo [6.25], si è poi dimostrato che mentre il PMI-OIMF continua a fornire risultati attendibili, lo stesso non si verifica per il PCOMAC-IMF.

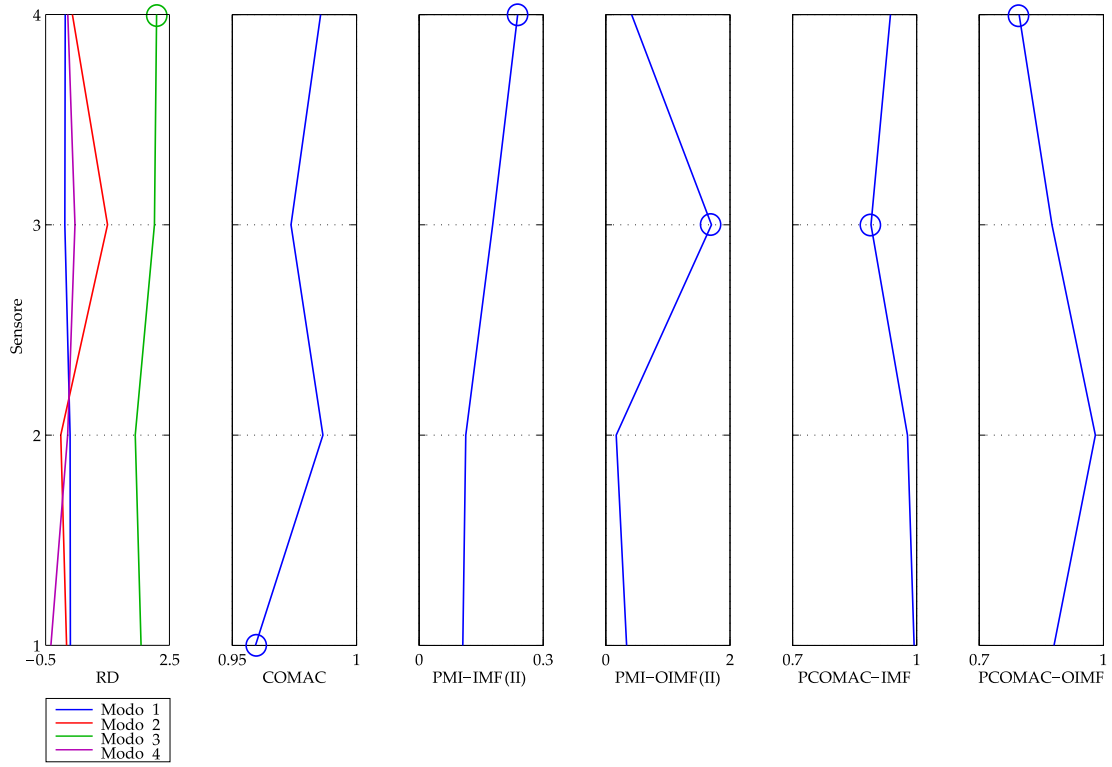


Figura 6.10: Confronto tra varie tecniche d'identificazione del danno.

6.3.5.2 Entità del danno

Partendo dalle medie statistiche sperimentali dell'autosoluzione (qui simulate numericamente) si vuole misurare l'entità del danno. In particolare, con riferimento alla tecnica d'identificazione sintetizzata in Figura 4.1, si utilizzano i risultati di una prima campagna con $\theta = 0$ per costruire il modello fisico (model updating stocastico, che, nella fattispecie, collassa nel caso deterministico, cfr. § 6.3.5), e quelli di una seconda campagna con $\theta \neq 0$ per misurare l'entità del danno (identificazione stocastica di modifiche strutturali).

Per quanto riguarda il model updating, si ammette che $n_\lambda = n_\phi = 4$, ovvero di aver misurato tutte le frequenze e tutti i modi di vibrare del telaio, i valori corrispondenti per le quantità $({}^k\tilde{\lambda}_i, {}^k\tilde{\phi}_i)$ sono gli stessi di Tabella 3.1; si ipotizza inoltre di inizializzare le matrici $\mathbf{M}_0$ e $\mathbf{K}_0$ nel seguente modo:

$$M_i = 1\text{kg} \quad K_i = 2250\text{N/m} \quad (6.14)$$

ovvero si suppone di conoscere con esattezza le masse e con una sovrastimata del 25 %

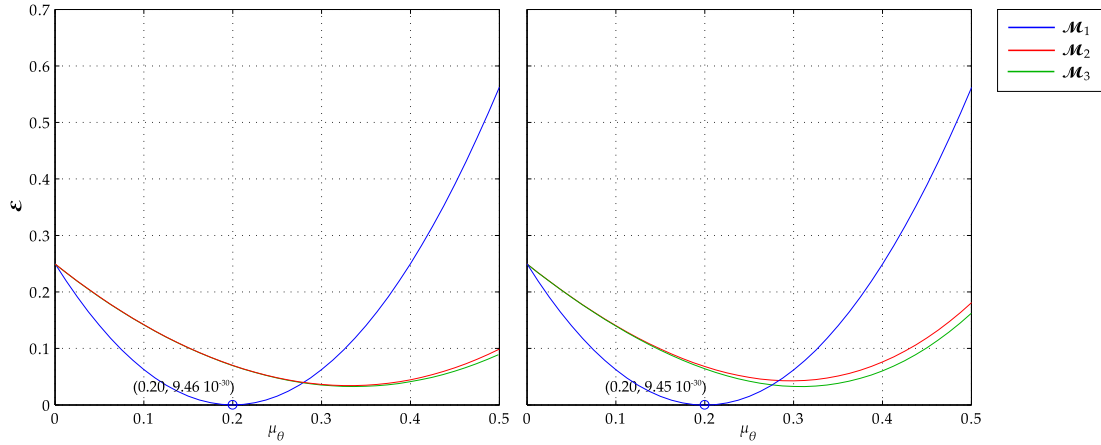


Figura 6.11: Funzione obiettivo e identificazione del parametro θ per il model updating: a sinistra la soluzione al primo ordine, a destra la soluzione al secondo ordine.

le rigidezze. Come modelli candidati $\mathcal{M}_h$ si utilizzano i seguenti tre:

$$\begin{cases} \mathcal{M}_1 : K_i = 2250(1 - \theta)\text{N/m} & i = 1, 2, 3, 4 \\ \mathcal{M}_2 : K_i = 2250(1 - \theta)\text{N/m} & i = 1, 2 & K_j = 2250\text{N/m} & j = 3, 4 \\ \mathcal{M}_3 : K_i = 2250(1 - \theta)\text{N/m} & i = 3, 4 & K_j = 2250\text{N/m} & j = 1, 2 \\ M_i = 1\text{kg} & \forall i, \mathcal{M}_h \end{cases} \quad (6.15)$$

il primo modello prevede di aggiornare tutte le rigidezze, il secondo solo la prima e la seconda, il terzo solo la terza e la quarta. I risultati di Figura 6.11 mostrano che la funzione obiettivo esibisce un comportamento praticamente identico passando dal primo al secondo ordine, con un minimo ben marcato (punto cerchiato) per il modello $\mathcal{M}_1$ (quello che coincide con il modello fisico effettivo) al quale la $(6.15)_1$ fa corrispondere (per congruenza con la simbologia adottata nel testo, il valore identificato è la media μ_θ del parametro θ , ma è ovvio che in questo caso deterministico $\mu_\theta = \theta$):

$$\tilde{\mu}_\theta = 0.20 \implies K_i = 2250(1 - 0.20)\text{N/m} = 1800\text{N/m} \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad (6.16)$$

rigidezza esattamente pari (nei limiti numerici) a quella effettiva; la procedura di model updating è sintetizzata in Tabella 6.3.5.

Passando all'identificazione stocastica del danno, allo scopo di testare l'affidabilità della tecnica perturbativa nell'esplorare l'intorno del modello aggiornato nella prima fase di model updating, non ci si riferisce a un singolo telaio danneggiato, ma, in perfetta analogia con quanto svolto per il problema diretto, si esplora un intorno ampio della soluzione; in particolare, si adottano gli stessi valori del problema diretto (cfr. § 3.6.3, con riferimento alla soluzione al primo ordine, e § 3.7.4, per quella al secondo ordine):

Grandezza	Inizializzata	Identificata $\mathcal{M}_1$	Effettiva
M_i , kg	1	1	1
K_i , N/m	2250	1800	1800

Tabella 6.5: Model updating.

$\mu_\theta \in (0, 0.5]$, $\sigma_\theta^2 = 0$ per il caso 1 deterministico, $\mu_\theta \in (0, 0.5]$, $\sigma_\theta^2 = (0.05 \mu_\theta)^2$ per il caso 2 aleatorio. Proprio perché si vuole esplorare un intorno ampio della soluzione imperturbata, quella ottenuta con il model updating, l'identificazione dei parametri è effettuata confrontando ogni modello danneggiato con quello di partenza (soluzione imperturbata); in altri termini, non si esegue un continuous model updating (in tal caso i termini perturbativi verrebbero aggiornarti, cambiando di volta in volta la soluzione imperturbata di partenza). Come si è già sottolineato, le quantità sperimentali ($^K \tilde{\lambda}_i$, $^K \tilde{\phi}_i$) sono qui ottenute numericamente partendo dalla soluzione del problema agli autovalori (3.32): per il caso deterministico sostituendo il valore del parametro μ_θ , per il caso aleatorio eseguendo una simulazione Monte Carlo di 5000 campioni estratti da una distribuzione normale $\mathcal{N}(\mu_\theta, \sigma_\theta^2)$. Si ammette ancora che $n_\lambda = n_\phi = 4$, ovvero di aver misurato tutte le frequenze e tutti i modi di vibrare del telaio.

Con riferimento al diagramma di flusso di Figura 4.1, per applicare la procedura d'identificazione proposta non resta che fornire i modelli candidati $\mathcal{M}_h$. Sfruttando i risultati ottenuti con l'indice PMI, la posizione del danno è da ritenere nota; la classe di modelli candidati $\mathcal{M}_h$ è quindi riconducibile all'unico modello:

$$\begin{cases} M_i = 1\text{kg} & i = 1, 2, 3, 4 \\ K_j = 1800\text{N/m} & j = 1, 2, 4 \quad K_3 = 1800(1 - \theta)\text{N/m} \end{cases} \quad (6.17)$$

Per il caso 1, deterministico, i risultati ottenuti sono quelli di Figura 6.12, che contiene sia la soluzione al primo ordine, sulla sinistra, sia quella al secondo ordine, sulla destra. Ognuno dei grafici riporta sull'asse delle quote i valori della funzione obiettivo $\mathcal{E}$ ottenuti al variare del valore effettivo del parametro μ_θ (quello utilizzato per simulare la risposta) e di quello di tentativo utilizzato nella procedura d'identificazione. La linea nera tratteggiata, la bisettrice del primo quadrante del piano contenente i parametri, rappresenta il percorso di minimo ideale della funzione obiettivo, ovvero la condizione in cui il valore effettivo del parametro μ_θ coincide con quello identificato $\tilde{\mu}_\theta$. Lo scostamento del percorso di minimo ottenuto (rappresentato in figura con una linea rossa continua) da quello ideale è perciò una misura qualitativa e speditiva della bontà della tecnica. Analizzando i risultati di Figura 6.12, si evince chiaramente sia il beneficio

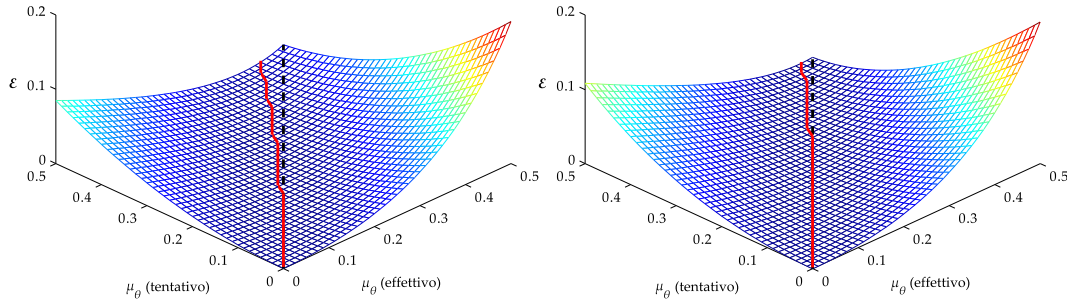


Figura 6.12: Funzione obiettivo e identificazione del parametro θ , caso 1: a sinistra la soluzione al primo ordine, a destra la soluzione al secondo ordine.

ottenuto utilizzando nella funzione obiettivo anche i termini quadratici, sia l'effettiva efficacia della tecnica, che, nonostante l'ampio range analizzato (riduzione del 50 % della rigidità del terzo piano), fornisce, con riferimento alla soluzione al secondo ordine, risultati più che soddisfacenti; in particolare l'errore massimo commesso nella stima di μ_θ è del 12 % circa al primo ordine e del 6 % circa al secondo ordine.

Per il caso 2, aleatorio, i risultati ottenuti sono quelli di Figura 6.13, contenente sia la soluzione al primo ordine, sulla sinistra, sia quella al secondo ordine, sulla destra. In questo caso, evidentemente, i grafici si riferiscono sia alla media che alla deviazione standard di θ : ricordato che tra i valori effettivi di media μ_θ e deviazione standard σ_θ intercorre, per ipotesi, la relazione $\sigma_\theta = 0.05 \mu_\theta$, appare chiaro come la funzione obiettivo $\mathcal{E}$ dipenderà da soltanto uno di questi due parametri d'ingresso (che fissa compiutamente i dati da utilizzare per simulare la risposta). Restando però la dipendenza dalla media e dalla deviazione standard di tentativo da utilizzare nella funzione obiettivo, nasce la difficoltà di dover rappresentare in forma agevole una funzione obiettivo a tre variabili.

Allo scopo di mantenere convenzioni grafiche analoghe al caso precedente (utili a visualizzare speditivamente la differenza tra il percorso di minimo ideale e quello effettivo), si conviene di rappresentare la funzione obiettivo in termini dell'involuppo dei minimi $\min_{\sigma_\theta} \mathcal{E}$, nel caso di identificazione della media, e $\min_{\mu_\theta} \mathcal{E}$, nel caso di identificazione della deviazione standard. Con questa convenzione, i grafici possono leggersi analogamente al caso precedente: al variare del valore effettivo della media μ_θ o della deviazione standard σ_θ del parametro (quello utilizzato per simulare la risposta) e del corrispondente valore di tentativo utilizzato nella procedura d'identificazione, l'asse delle quote riporta i valori dell'involuppo correlato; la linea nera tratteggiata, bisettrice del primo quadrante del piano contenente le statistiche dei parametri, rappresenta poi il percorso di minimo ideale della funzione obiettivo, mentre la linea rossa quello

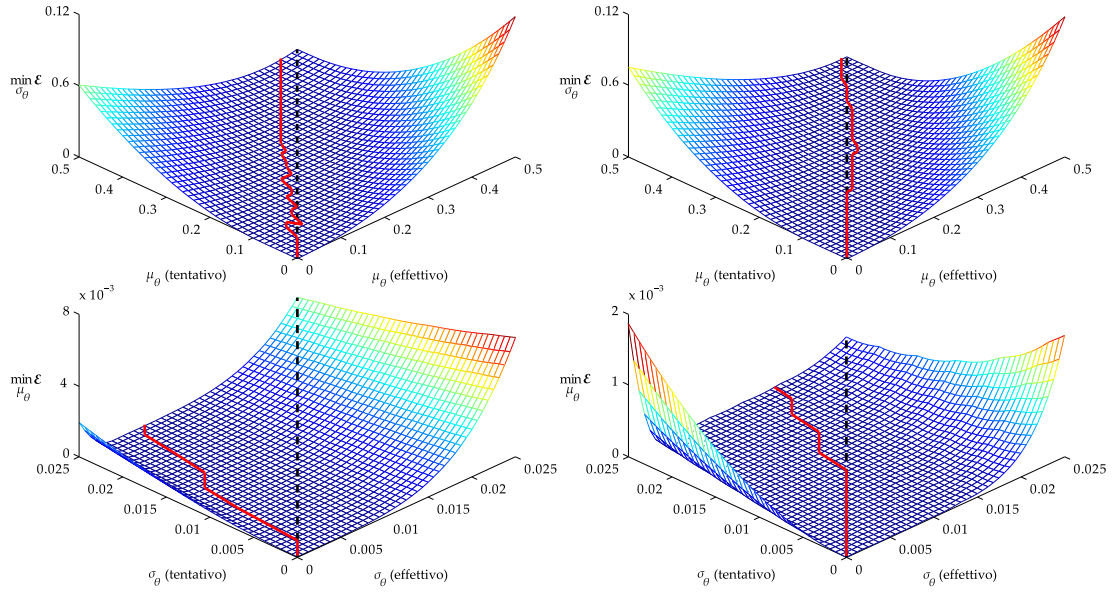


Figura 6.13: Funzione obiettivo e identificazione del parametro θ , caso 2: a sinistra la soluzione al primo ordine, a destra la soluzione al secondo ordine.

effettivo.

Confrontando i risultati di Figura 6.13 con quelli di Figura 6.12, la prima conclusione che si può trarre è che passando dal caso deterministico a quello stocastico si ha un lieve peggioramento nell'identificazione della media del parametro. Il risultato più interessante riguarda però la deviazione standard: se la soluzione al primo ordine tende a divergere subitamente da quella effettiva, la soluzione al secondo ordine è in grado di esplorare correttamente un ampio intorno della soluzione imperturbata. Detto che, per entrambi gli ordini perturbativi, i minimi giacciono, da un certo punto in poi, fuori dal dominio rappresentato (fissato imponendo convenientemente l'uguaglianza tra il range dei parametri effettivi e quello dei parametri di tentativo), l'errore massimo commesso nella stima di σ_θ nell'intero range dei parametri effettivi è del 340 % circa al primo ordine, e del 70 % circa al secondo ordine.

In definitiva, la tecnica proposta è stata applicata con successo per l'identificazione di un parametro incerto di danno in un telaio shear type a 4 piani; nello specifico, l'errore commesso nella misura del danneggiamento può considerarsi nullo (nei limiti numerici) se:

- il danno è deterministico e la rigidezza si riduce al più del 15 %, nel caso di soluzione al primo ordine, e al più del 30 %, nel caso di soluzione al secondo ordine;

- il danno è stocastico e la rigidezza si riduce al più del 5 %, nel caso di soluzione al primo ordine, e al più del 20 %, nel caso di soluzione al secondo ordine;

risultati che, da una parte confermano l'intrinseca maggiore semplicità del caso deterministico rispetto allo stocastico, e dall'altra testimoniano come in quest'ultimo caso sia indispensabile implementare termini perturbativi almeno quadratici².

6.4 Considerazioni sintetiche

La procedura d'identificazione del danno strutturale introdotta trae spunto dall'idea di analizzare il danno cercando di massimizzare le informazioni contenute nei segnali di risposta; è noto, infatti, che la risoluzione di tale problema inverso è particolarmente ostica, specialmente se si tratta di un danneggiamento *lieve*.

Partendo da questa considerazione, l'indice introdotto utilizza un approccio pseudo-modale basato sull'EMD e che cerca di *enfaticizzare* il contenuto del segnale più di quanto possano effettivamente fare i modi di vibrare. Indubbiamente l'ipotesi assunta precipuamente come linea portante che l'EMD sia lo strumento in grado di rispondere a questa indagine di dettaglio sul segnale è un procedimento ad oggi ancora euristico, prevalentemente perché la tecnica EMD stessa è ancora in fase di sviluppo. Da un punto di vista epistemologico, che prescinde da paragoni troppo azzardati, è pur vero che anche la trasformata di Fourier, introdotta nel 1807, è stata dimostrata e capita compiutamente solo 126 anni dopo, nel 1933, con gli studi di Plancherel [6.12], e che quando Morlet nel 1984 introdusse la trasformata Wavelet ricevette molte critiche da parte dei suoi colleghi prima che gli fosse riconosciuto il giusto merito [6.18].

²Probabilità di danneggiamento: nel § 4.2.5 si erano ricavate le relazioni valide per il calcolo della probabilità di danneggiamento. In questo esempio (con riferimento ovviamente al caso 2, aleatorio, l'unico per il quale ha senso discutere di probabilità), ricadendo nel caso notevole in cui il parametro di danno coincide con la riduzione di rigidezza, un'applicazione della (4.15)₂, con le posizioni (4.17), sarebbe sufficiente ai fini del calcolo della probabilità di danneggiamento. Tale valutazione viene, tuttavia, omessa, dato che la scelta di un valore del coefficiente di variazione del parametro ridotto e costante induce una probabilità di danneggiamento praticamente unitaria per qualsivoglia entità del danneggiamento. Da un punto di vista intuitivo, accade, infatti, che per valori medi piccoli del parametro di danno la probabilità di danneggiamento tende a uno perché si ha a che fare con quantità praticamente deterministiche, mentre per valori medi elevati del parametro, cui competono, quindi, anche più grandi dispersioni, la probabilità tende egualmente a uno perché al tempo stesso ci si allontana di più dalle condizioni relative allo stato integro.

Bibliografia

- [6.1] E. P. Carden e P. Fanning. “Vibration-based condition monitoring: a review”. *Structural Health Monitoring*, 3(4):355–377, 2004.
- [6.2] N. Cheraghi e F. Taheri. “A damage index for structural health monitoring based on the empirical mode decomposition”. *Journal of Mechanics of Materials and Structures*, 2(1):43–61, 2007.
- [6.3] P. J. S. Cruz e R. Salgado. “Performance of vibration-based damage detection methods in bridges”. *Computer-Aided Civil and Infrastructure Engineering*, 24(1):62–79, 2009.
- [6.4] S. W. Doebling, C. R. Farrar, M. B. Prime, e D. W. Shevitz. “Damage identification and health monitoring of structural and mechanical systems from changes in their vibration characteristics: a literature review”. Technical Report Los Alamos National Laboratory, LA-13070-MS, 1996.
- [6.5] Y. Dong, Y. Li, e M. Lai. “Structural damage detection using Empirical Mode Decomposition and Vector AutoRegressive Roving Average model”. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 30(3):133–145, 2010.
- [6.6] W. Fan e P. Qiao. “Vibration-based damage identification methods: a review and comparative study”. *Structural Health Monitoring*, 10(1):83–111, 2011.
- [6.7] C. R. Farrar e K. Worden. “Structural health monitoring: a machine learning perspective”. John Wiley & Sons, 1^a edizione, 2012.
- [6.8] C. H. J. Fox. “The location of defects in structures. A comparison of the use of natural frequency and mode shape data”. 10th International Modal Analysis Conference, IMAC, 1992.
- [6.9] A. Garcia-Perez, J. P. Amezquita-Sanchez, A. Dominguez-Gonzalez, R. Sedaghati, R. Osornio-Rios, e R. J. Romero-Troncoso. “Fused Empirical Mode Decomposition and Wavelets for locating combined damage in a truss-type structure through vibration analysis”. *Journal of Zhejiang University SCIENCE A*, 14(9):615–630, 2013.
- [6.10] S. Gopalakrishnan, M. Ruzzenne, e S. Hanagud. “Computational techniques for structural health monitoring”. Springer, 1^a edizione, 2011.
- [6.11] Z. Hou, M. Noori, e R. Amand. “Wavelet-based approach for structural damage detection”. *Journal of Engineering Mechanics*, 126(7):677–683, 2000.

-
- [6.12] N. E. Huang e S. S. P. Shen. "Hilbert-Huang transform and its applications", volume 5 di *Interdisciplinary Mathematical Sciences. Proceedings of the Royal Society of London. Series A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 1^a edizione, 2005.
- [6.13] N. E. Huang, Z. Shen, S. R. Long, M. C. Wu, H. H. Shih, Q. Zheng, N. C. Yen, C. C. Tung, e H. H. Liu. "The Empirical Mode Decomposition and the Hilbert spectrum for nonlinear and nonstationary time series analysis". *Proceedings of the Royal Society of London. Series A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 454(1971):903–995, 1998.
- [6.14] A. Kunwar, R. Jha, M. Whelan, e K. Janoyan. "Damage detection in an experimental bridge model using Hilbert-Huang transform of transient vibrations". *Structural Control and Health Monitoring*, 20(1):1–15, 2013.
- [6.15] H. Li, X. Deng, e H. Dai. "Structural damage detection using the combination method of EMD and Wavelet analysis". *Mechanical Systems and Signal Processing*, 21(1):298–306, 2007.
- [6.16] N. A. J. Lieven e D. J. Ewins. "Spatial correlation of mode shapes, the coordinate modal assurance criterion (COMAC)". 6th International Modal Analysis Conference, IMAC, 1988.
- [6.17] A. Pau, A. Greco, e F. Vestroni. "Numerical and experimental detection of concentrated damage in a parabolic arch by measured frequency variations". *Journal of Vibration and Control*, 17(4):605–614, 2011.
- [6.18] Z. K. Peng e F. L. Chu. "Application of the Wavelet transform in machine condition monitoring and fault diagnostics: a review with bibliography". *Mechanical Systems and Signal Processing*, 18(2):199–221, 2004.
- [6.19] S. T. Quek, P. S. Tua, e Q. Wang. "Detecting anomalies in beams and plate based on the Hilbert-Huang transform of real signals". *Smart Materials and Structures*, 12(3):447–460, 2003.
- [6.20] L. F. Ramos, G. De Roeck, P. B. Lourenço, e A. Campos-Costa. "Damage identification on arched masonry structures using ambient and random impact vibrations". *Engineering Structures*, 32(1):146–162, 2010.
- [6.21] P. Razi, R. A. Esmael, e F. Taheri. "Application of a robust vibration-based non-destructive method for detection of fatigue cracks in structures". *Smart Materials and Structures*, 20(11):1–12, 2011.

-
- [6.22] D. Rezaei e F. Taheri. "Experimental validation of a novel structural damage detection method based on Empirical Mode Decomposition". *Smart Materials and Structures*, 18(4):1–14, 2009.
- [6.23] D. Rezaei e F. Taheri. "Damage identification in beams using Empirical Mode Decomposition". *Structural Health Monitoring*, 10(3):261–274, 2010.
- [6.24] G. Rilling e P. Flandrin. "One or two frequencies? The Empirical Mode Decomposition answers". *Signal Processing, IEEE Transactions on*, 56(1):85–95, 2008.
- [6.25] F. Romeo, E. Lofrano, e A. Paolone. "Damage identification in a parabolic arch via Orthogonal Empirical Mode Decomposition". *ASME (IDETC/CIE/VIB) Conference*, 2014.
- [6.26] M. Rucka. "Damage detection in beams using Wavelet transform on higher vibration modes". *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 49(2):339–417, 2011.
- [6.27] T. Rytter. "Vibration based inspection of civil engineering structure". PhD dissertation - Aalborg University, 1993.
- [6.28] O. S. Salawu. "Detection of structural damage through changes in frequency: a review". *Engineering Structures*, 19(9):718–723, 1997.
- [6.29] H. Sohn, C. R. Farrar, F. M. Hemez, e J. Czarnecki. "A review of structural health monitoring literature: 1996-2001". Los Alamos National Laboratory, 2004.
- [6.30] D. N. Thatoi, H. C. Das, e D. R. Parhi. "Review of techniques for fault diagnosis in damaged structure and engineering system". *Advances in Mechanical Engineering*, 2012(1):1–11, 2012.
- [6.31] K. Worden, C. R. Farrar, G. Manson, e G. Park. "The fundamental axioms of structural health monitoring". *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Science*, 463(2082):1639–1664, 2007.
- [6.32] Y. Xu e J. Chen. "Structural damage detection using Empirical Mode Decomposition: experimental investigation". *Journal of Engineering Mechanics*, 130(11):1279–1288, 2004.

Pagina lasciata intenzionalmente bianca.

Parte 4: Conclusioni, appendici e bibliografia generale

Pagina lasciata intenzionalmente bianca.

Capitolo 7

Conclusioni

7

Si analizzano in forma sintetica i risultati ottenuti nel presente lavoro di tesi, enucleandone poi, più nello specifico, i principali contenuti di originalità. Il capitolo si chiude con una disamina delle potenziali prospettive future di ricerca.

7.1 Commenti conclusivi

Nella prima parte del documento si sono richiamati brevemente alcuni concetti basilari dell'identificazione dinamica strutturale, partendo dapprima da un inquadramento generale, per poi passare a sintetici cenni storici e alla redazione di uno stato dell'arte. Allo scopo di meglio inquadrare e circoscrivere l'argomento trattato, oltre che di rendere più intellegibile il documento, si sono poi analizzate le motivazioni e gli obiettivi del progetto di tesi.

Nella seconda parte è stata introdotta una tecnica d'identificazione dinamica di strutture a parametri incerti. Le principali caratteristiche del metodo sono:

- si utilizza un approccio stocastico perturbativo:
 - l'approccio è computazionalmente vantaggioso;
 - l'algoritmo è facilmente gestibile;
- la formulazione non dipende dall'ordine di perturbazione;

- l'estensione al caso multi-parametrico è agevole.

Nella terza parte è stata introdotta una tecnica d'identificazione del danno di livello 2, di validità generale ma in particolare utile, ai fini della tesi, per le problematiche riscontrate nella selezione del modello fisico nei casi in cui i parametri incerti sono, per l'appunto, parametri di danno. Le principali caratteristiche del metodo sono:

- si ricorre a un approccio pseudo-modale, guidato dai dati e che non richiede alcun modello numerico;
- il metodo è imperniato su misure energetiche, quindi:
 - è fondamentale adoperare la versione ortogonale della decomposizione EMD utilizzata;
 - la selezione del sub-segnale OIMF più significativo è immediata e semplice.

7.2 Contributi originali

L'approccio perturbativo, utilizzato sovente nel problema dinamico diretto, non sembra aver trovato ampi sbocchi nel problema inverso qui trattato. Infatti, nell'identificazione la valutazione della componente aleatoria è spesso demandata a tecniche bayesiane, computazionalmente onerose. La procedura sviluppata nella tesi sfrutta le potenzialità del metodo perturbativo per proporre una tecnica d'identificazione dei parametri incerti delle strutture basata su una funzione obiettivo. Le principali novità della tecnica rispetto alle altre già esistenti in letteratura e afferenti allo stesso filone sono: da una parte la costruzione di un modello a carattere più generale (i termini perturbativi sono espressi in forma generale) e dall'altra la genesi del problema inverso (l'indipendenza dall'ordine di perturbazione e la scrittura di una funzione obiettivo capace di contemplare tanto gli autovalori quanto gli autovettori e di pesarne in termini globali le relative statistiche). Le applicazioni sviluppate nell'ambito della tesi, e parzialmente presentate anche in [7.1], hanno dato esito promettente. Nello studio delle distribuzioni degli autovettori si è altresì rilevata la presenza di alcune irregolarità nelle medie statistiche, un fenomeno che dalle ricerche effettuate risulta essere qualitativamente nuovo nella letteratura.

L'approccio proposto per la stima preliminare della posizione del danneggiamento nel caso notevole di struttura a parametri incerti di danno, prende le mosse dalla tecnica tempo-frequenza nota in letteratura come EMD. La principale novità consiste nello sfruttare le capacità di questo banco di filtri per generare un insieme di sub-segnali guidato dai dati da utilizzare come base sulla quale introdurre un confronto imperniato

su misure energetiche. La tecnica, che non richiede alcun modello numerico, si pone quindi a cavallo tra i metodi che sfruttano le sole caratteristiche di elaborazione dei segnali e quelli che si riconducono alle proprietà modali della struttura. I risultati ottenuti nel progetto di tesi sono incoraggianti; la tecnica è stata inoltre applicata con successo per l'identificazione del danno di un arco prototipo in acciaio, a sesto parabolico (luce 1010 mm e freccia 205 mm) e doppiamente incernierato alle estremità [7.2, 3].

Si precisa che, con la convinzione che l'acquisizione delle nozioni non possa prescindere dalla conoscenza delle tecniche, tutte le applicazioni presentate nella tesi sono state sviluppate tramite codici *in house* implementati in ambiente MATLAB.

7.3 Prospettive future di ricerca

Sulla tecnica d'identificazione dinamica probabilistica, le future linee di ricerca possibili concernono:

- indagare fenomeni di irregolarità delle statistiche degli autovettori per stabilire se l'anomalia è sistemica, ovvero in che misura dipende dal modello strutturale adottato (ivi comprese le distribuzioni di partenza dei parametri incerti) e dallo scalamento effettuato sui modi;
- approfondire la tematica correlata al caso multi-parametrico e considerare il caso in cui la risposta strutturale è nota solo in forma parziale;
- estendere la procedura ad altre classi di sistemi vibranti (sistemi smorzati e/o continui e/o ad autovalori prossimi/multipli);
- valutare l'effetto del rumore sulla procedura ed eseguire una validazione sperimentale.

Circa il metodo proposto per la selezione del modello, ovvero, la tecnica d'identificazione del danno denominata PMI, le principali prospettive di ricerca possibili sono le seguenti:

- verificare l'applicabilità del metodo in presenza di segnali corrotti dal rumore (preferibilmente eseguendo una validazione sperimentale), così come per scenari di danno e sistemi strutturali più generali;
- rafforzare la base teorica della filosofia del metodo PMI (l'individuazione del danno tramite un opportuno banco di filtri), eventualmente implementando nella procedura altre tecniche di analisi del segnale e riferendosi a segnali di risposta più sensibili (e.g., le curvature modali);

- relazionare l'indice PMI all'entità del danno, sarebbe a dire, usando la consueta classificazione già richiamata nel testo, passare da una tecnica d'identificazione del danno di livello 2 a una di livello 3.



Bibliografia

- [7.1] E. Lofrano, A. Paolone, e F. Romeo. *"Damage identification in a parabolic arch through the combined use of modal properties and Empirical Mode Decomposition"*. 9th International Conference On Structural Dynamics, EURODYN, 2014.
- [7.2] E. Lofrano, A. Paolone, e M. Vasta. *"A perturbation approach for the identification of uncertain structures"*. 8th European Nonlinear Dynamics Conferences, ENOC, 2014.
- [7.3] F. Romeo, E. Lofrano, e A. Paolone. *"Damage identification in a parabolic arch via Orthogonal Empirical Mode Decomposition"*. ASME (IDETC/CIE/VIB) Conference, 2014.

Appendice A

Trasformata discreta di Fourier



La trasformata discreta di Fourier non è di applicazione immediata: la bontà dei risultati dipende da una serie di aspetti che, se non opportunamente trattati, possono mistificare il reale contenuto spettrale di un segnale. Nel seguito si richiamano e commentano i concetti basilari legati all'implementazione e all'interpretazione della DFT; informazioni più dettagliate sono reperibili nell'ampia letteratura di riferimento, come in [A.3], per la teoria dei segnali in genere, e in [A.1], per applicazioni a carattere più ingegneristico.

A.1 Trasformata di Fourier veloce

La quantità di elaborazioni richieste per lo sviluppo della trasformata discreta di Fourier rende il metodo molto oneroso anche se opportunamente implementato su calcolatore elettronico. Un notevole miglioramento delle prestazioni può però essere ottenuto ricorrendo a una trasformata di Fourier veloce, ovvero **FFT** (*Fast Fourier Transform*).

Nelle tecniche FFT, infatti, il numero di elaborazioni necessarie per eseguire l'analisi di Fourier di un segnale viene drasticamente ridotto. Esistono sia procedure FFT esatte, ovvero che riproducono gli stessi risultati della DFT, che approssimate; ad esempio, il principio di funzionamento dell'algoritmo FFT esatto più diffuso, quello di Cooley-Tukey [A.2], è basato sull'utilizzo di una tecnica dicotomica: il calcolo della trasformata su un intervallo si svolge dividendo l'intervallo stesso in due parti uguali

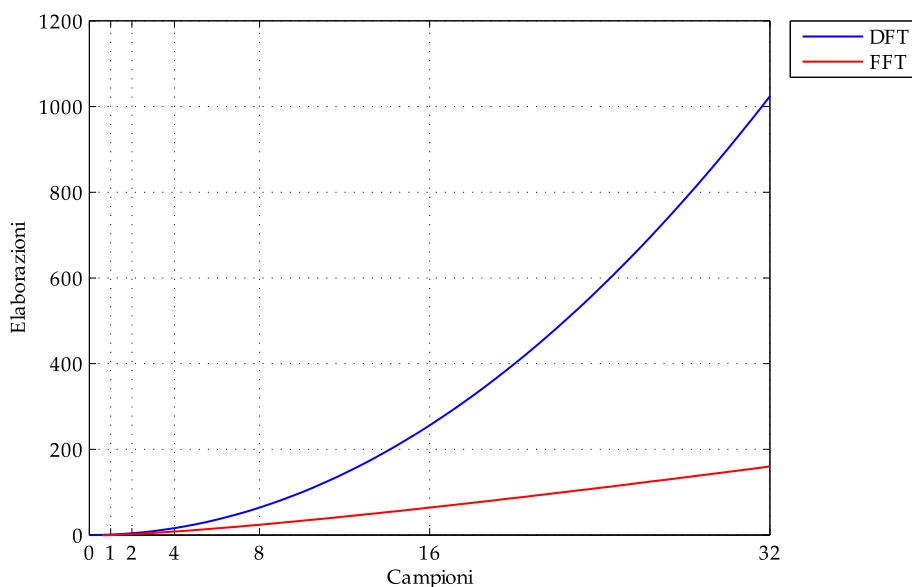


Figura A.1: Complessità degli algoritmi DFT e FFT.

e calcolando la trasformata sull'intervallo di sinistra e su quello di destra, applicando ivi ulteriori suddivisioni, e così via. Proseguendo con tale tecnica ricorsiva, le continue suddivisioni per 2 fanno sì che tale algoritmo FFT sia destinato a segnali costituiti da $N = 2^n$ campioni.

Utilizzando una trasformata di Fourier veloce la complessità¹ dell'algoritmo DFT, pari a N^2 , viene ridotta all'ordine $N \log_2(N)$, come esemplificato in Figura A.1.

A.2 Leakage

Dato un segnale continuo e illimitato nel tempo, per eseguirne la DFT è necessario applicare una finestra temporale rettangolare e ivi misurare i valori assunti dal segnale stesso a intervalli di tempo regolari. In questo modo, infatti, il segnale spazia su un dominio discreto limitato, e, pertanto, è possibile eseguirne la DFT.

Ipotizzando che il segnale continuo di partenza sia periodico, affinché la DFT restituisca lo stesso risultato è necessario che il tratto di segnale acquisito sia periodico. In caso contrario, infatti, si verifica il fenomeno del *leakage* (dispersione spettrale), che consiste nella dispersione in un'ampia banda di frequenza del contenuto spettrale del segnale originale, vedi Figura A.2.

¹Complessità di un algoritmo: nella teoria degli algoritmi lo studio della complessità, computazionale e spaziale, indica come crescono il tempo necessario a eseguire l'algoritmo e lo spazio di memoria occupato nel calcolatore, al crescere della dimensioni del problema.

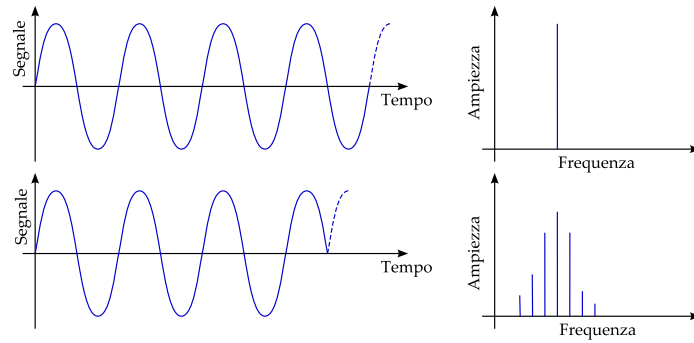


Figura A.2: Illustrazione del fenomeno del leakage.

In Figura A.3 è riportato l'andamento di un segnale sinusoidale $y = \sin(2\pi f t)$ con frequenza $f = 10$ Hz campionato con frequenza 30 Hz. Nello specifico, i grafici sulla sinistra rappresentano, dall'alto verso il basso, il segnale originario e i segnali campionati rispettando oppure no la periodicità di partenza (si fa notare che, come esemplificato in Figura 2.4, è il campionamento riportato nel grafico al centro quello coerente con la condizione di periodicità). I corrispondenti spettri d'ampiezza riportati nei grafici sulla destra, confermano la comparsa del fenomeno del leakage per campionamenti che violano la periodicità.

Nella pratica, la natura complessa dei segnali reali fa sì che l'effetto leakage sia sempre presente, da cui la necessità di studiare opportuni accorgimenti atti a ridurre l'entità. Per attenuare la dispersione spettrale, si può intervenire in tre diversi modi: si può estendere il tempo di osservazione, si può accrescere la frequenza di campionamento, e si può applicare una procedura nota come *windowing* (finestratura del segnale), che consiste nell'applicare una finestra temporale con forme diverse da quella rettangolare. Tali finestre hanno lo scopo di enfatizzare la parte centrale del segnale e annullare i contributi agli estremi (0 e T_c), in modo che il segnale finestrato inizi e termini con il medesimo valore. Formalmente questo equivale a moltiplicare il segnale $y(t)$ per una finestra $W(t)$, la cui forma è in genere ottimizzata in funzione della natura del segnale. In Figura A.4 sono riportate alcune finestre temporali ampiamente utilizzate, quali la finestra di *Welch*:

$$W(t) = 1 - \left(\frac{t - \frac{T_c}{2}}{\frac{T_c}{2}} \right)^2$$

la finestra di *Hanning*:

$$W(t) = \frac{1}{2} \left(1 - \cos\left(\frac{2\pi t}{T_c}\right) \right)$$

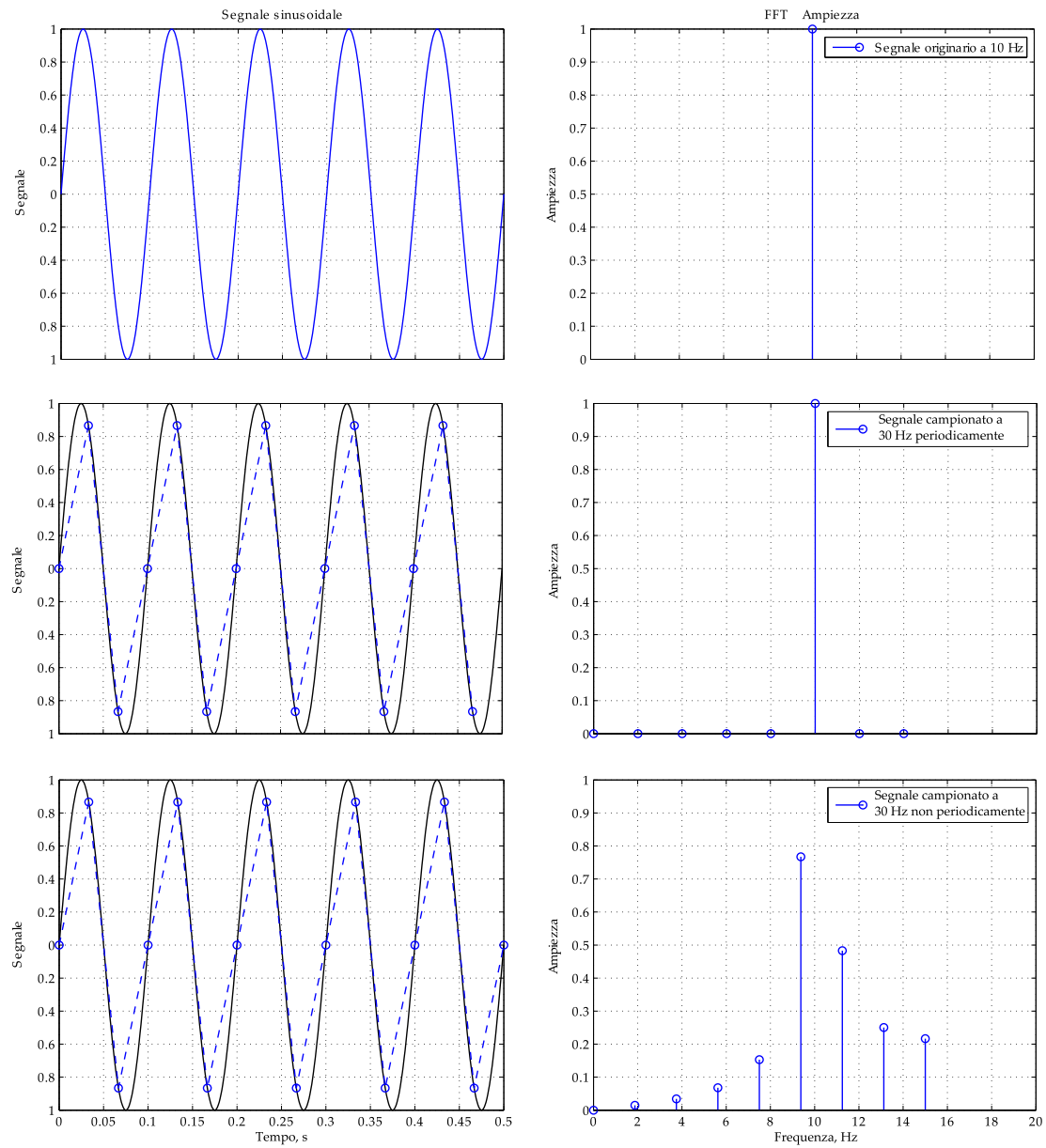


Figura A.3: Fenomeno del leakage.

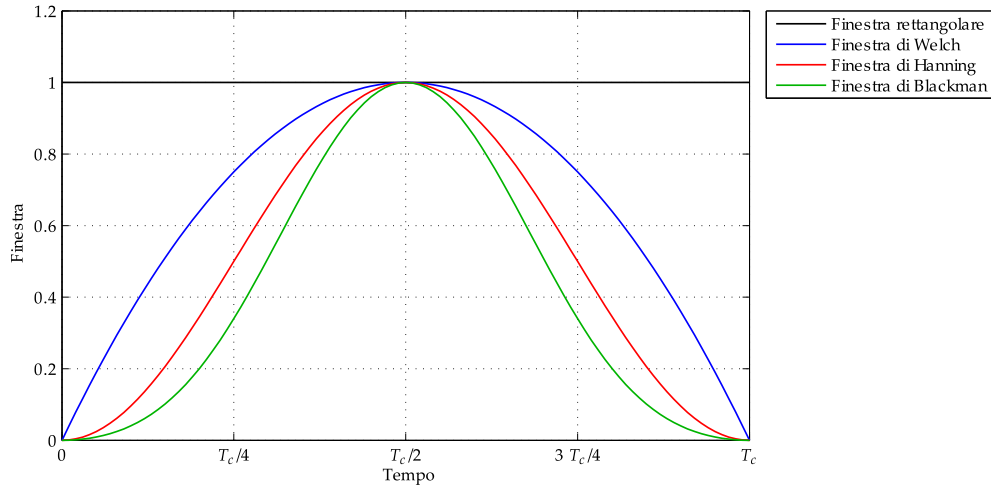


Figura A.4: Esempi di finestre temporali.

e la finestra di *Blackman*:

$$\begin{cases} W(t) = a_0 - a_1 \cos\left(\frac{2\pi t}{T_c}\right) + a_2 \cos\left(\frac{4\pi t}{T_c}\right) \\ a_0 = \frac{7938}{18608} \simeq 0.42 & a_1 = \frac{9240}{18608} \simeq 0.50 & a_2 = \frac{1430}{18608} \simeq 0.08 \end{cases}$$

Si considerino nuovamente i due grafici riportati in basso in Figura A.3, relativi a un segnale sinusoidale $y = \sin(2\pi f t)$ con frequenza $f = 10$ Hz campionato non periodicamente con frequenza 30 Hz. Partendo dall'alto verso il basso, i risultati di Figura A.5² mostrano la riduzione del leakage per effetto dell'estensione dell'intervallo di osservazione, dell'accrescimento della frequenza di campionamento e dell'applicazione di una finestra di Hanning.

A.3 Teorema di Shannon e aliasing

Affinché un segnale di frequenza f sia acquisito correttamente, ovvero senza alterarne il contenuto spettrale, è necessario che il campionamento avvenga con una frequenza f_N , detta *frequenza di Nyquist*, almeno pari a:

$$f_N = 2f$$

Da un punto di vista applicativo, tale condizione, nota come *teorema di Shannon* o *teorema del campionamento*, richiede che la frequenza di campionamento f_s sia superiore

²Intervallo di osservazione: la quantità T_c^* riportata in Figura A.5 rappresenta il tempo di osservazione T_c al netto dell'ultimo intervallo: $T_c^* = T_c(1 - 1/N)$, vedi Figura 2.4.

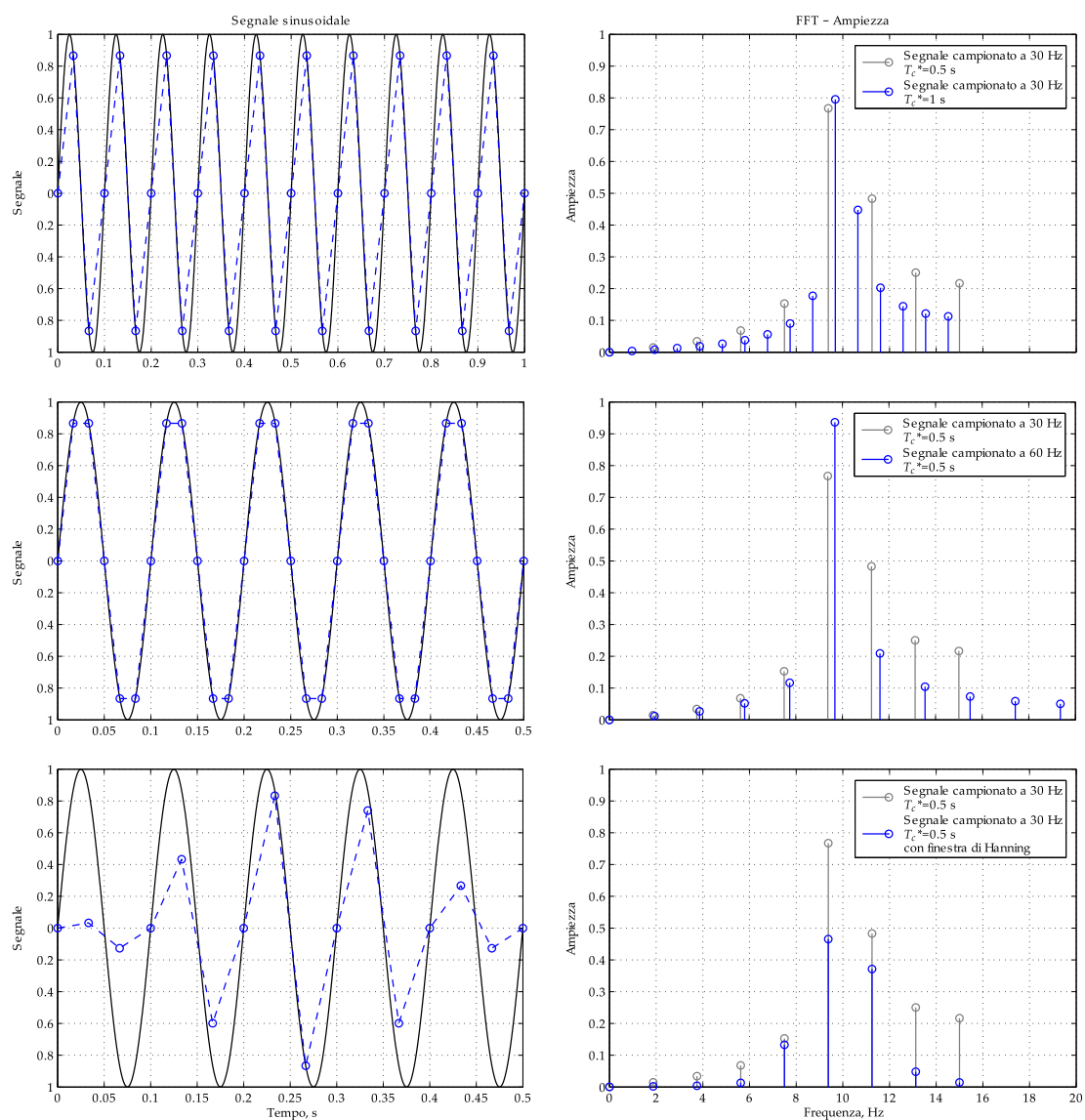


Figura A.5: Riduzione del leakage.

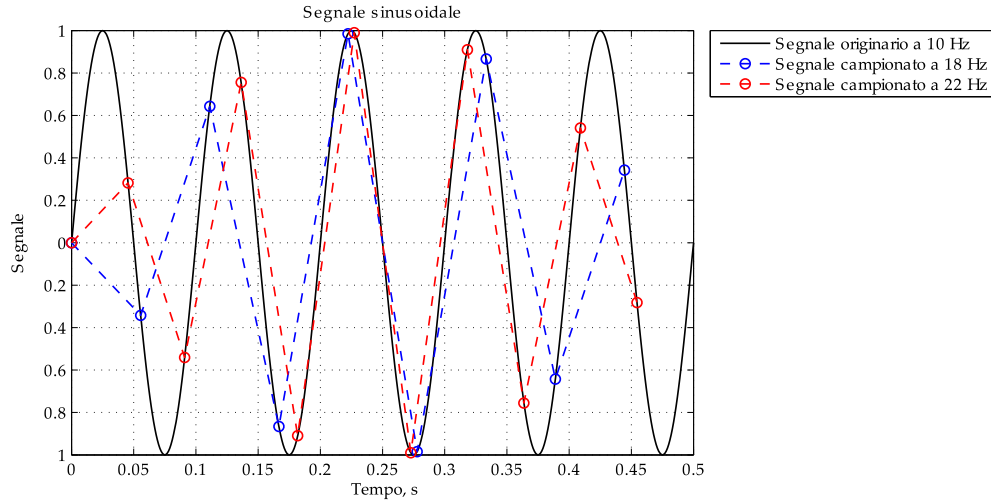


Figura A.6: Diversi campionamenti di un segnale sinusoidale.

al doppio della frequenza massima contenuta nel segnale:

$$f_s \geq 2f_{max}$$

Il teorema di Shannon può interpretarsi graficamente: per definirne in modo univoco l'andamento del segnale è necessario acquisire almeno due punti della sinusoide con frequenza massima. Nel caso in cui questo requisito viene violato, si manifesta il fenomeno denominato *aliasing* (segnali fantasma), per il quale se una sinusoide con frequenza f viene campionata con frequenza inferiore alla frequenza di Nyquist, nello spettro d'ampiezza del segnale ricostruito si manifesta erroneamente un picco in corrispondenza della frequenza $f_s - f$.

In Figura A.6 è riportato l'andamento di un segnale sinusoidale $y = \sin(2\pi f t)$ con frequenza $f = 10$ Hz campionato con due differenti frequenze di 18 e 22 Hz. Se il segnale originario è campionato con una frequenza $f_s = 18$ Hz, inferiore a quella di Nyquist $f_N = 20$ Hz, nello spettro d'ampiezza del segnale ricostruito, Figura A.7, appare erroneamente un picco in corrispondenza della frequenza $f_s - f = 8$ Hz. Se, invece, il campionamento avviene con una frequenza $f_s = 22$ Hz $> f_N = 20$ Hz, rispettosa del teorema di Shannon, il picco in frequenza è correttamente ricostruito, Figura A.7. Giova ricordare, come, per entrambe le frequenze di campionamento, nello spettro di Figura A.7 non appaia il fenomeno del leakage, essendo il campionamento rispettoso della periodicità del segnale originario.

Denominato T_c l'intervallo di osservazione del segnale, il teorema di Shannon permette di stabilire anche il numero minimo di campioni da analizzare:

$$N_c = 2f_{max}T_c$$

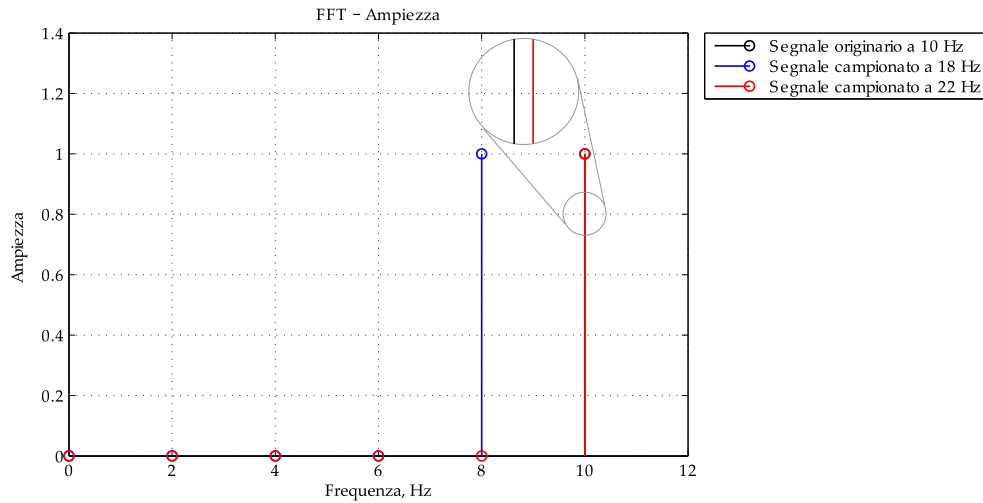


Figura A.7: Fenomeno di aliasing.

quantità nota pure come numero dei *gradi di libertà del segnale*.

A.4 Filtro anti-alias

Nella pratica, il segnale da acquisire ha sempre componenti a frequenze elevate per le quali non è possibile soddisfare il teorema di Shannon, pertanto se il campionamento avvenisse senza un condizionamento iniziale, il corrispondente contenuto spettrale risulterebbe alterato a causa dell'aliasing.

In Figura A.8 è mostrata la distorsione subita da uno spettro d'ampiezza per effetto dell'aliasing: rappresentando, per chiarezza espositiva, i valori discreti per mezzo del loro involuppo, si evince che le ampiezze al di sopra del valore $f_s/2$ accrescono (coerentemente con quanto precisato nella descrizione del fenomeno dell'aliasing) la porzione compresa tra 0 e $f_s/2$. Per questo motivo, un sistema di acquisizione reale è sempre caratterizzato dalla presenza di un *filtro passa-basso* o *anti-aliasing* che limita convenientemente la banda del segnale analogico a un valore tale da annullare l'aliasing per la frequenza di campionamento f_s fissata.

Da un punto di vista teorico, basterebbe utilizzare un filtraggio passa-basso con frequenza di taglio pari a $f_s/2$ e successivamente acquisire il segnale; tuttavia un filtraggio numerico reale ha sempre una curva di transizione diversa da quella ideale e caratterizzata da una pendenza finita in prossimità della frequenza di taglio. Tale circostanza, induce un errore nel campionamento del segnale, che può solo essere minimizzato (ma non annullato) calibrando opportunamente la frequenza di taglio. In

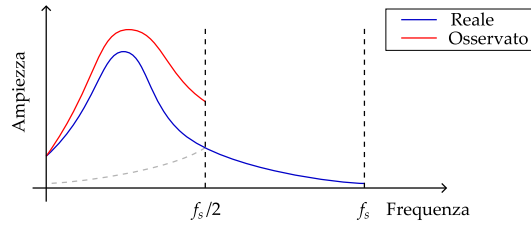


Figura A.8: Distorsione dello spettro per effetto dell'aliasing.

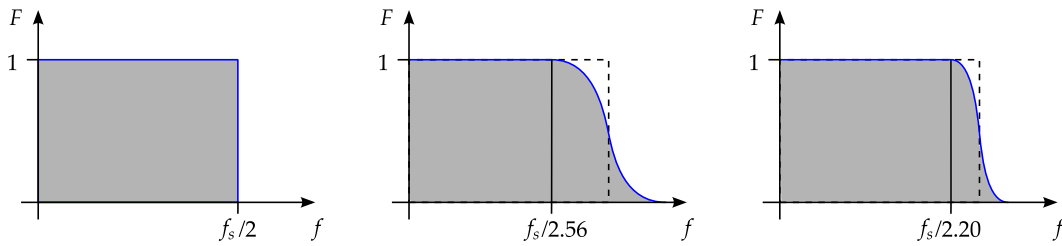


Figura A.9: Filtri passa-basso: a sinistra il filtro ideale, al centro un filtro reale con taglio a $f_s/2.56$, a destra un filtro reale con taglio a $f_s/2.20$.

genere si utilizza un filtro passa-basso caratterizzato da una frequenza di taglio pari a:

$$\frac{f_s}{2.56} \simeq 0.80 \frac{f_s}{2}$$

ma esistono filtri recenti, più performanti, caratterizzati da una frequenza di taglio più prossima a quella teorica:

$$\frac{f_s}{2.20} \simeq 0.90 \frac{f_s}{2}$$

come schematizzato in Figura A.9, nella quale la funzione $F(f)$ rappresenta l'azione del filtro sul segnale (un valore unitario indica che il segnale è completamente acquisito, un valore nullo che il segnale non è acquisito, mentre valori intermedi sono indice di un'acquisizione parziale).

A.5 Zero padding

Per migliorare la risoluzione in frequenza della DFT si può ricorrere a una tecnica, nota come *zero padding* (riempimento con zeri), che consiste nel prolungare artificialmente il segnale, aggiungendo degli zero in fondo alla sequenza di valori discreti rappresentativa del segnale campionato. Tale operazione di allungamento migliora la posizione e l'ampiezza dei picchi spettrali e può servire anche per rendere il numero di campioni da elaborare una potenza di due, condizione che ottimizza l'implementazione di molti algoritmi FFT.

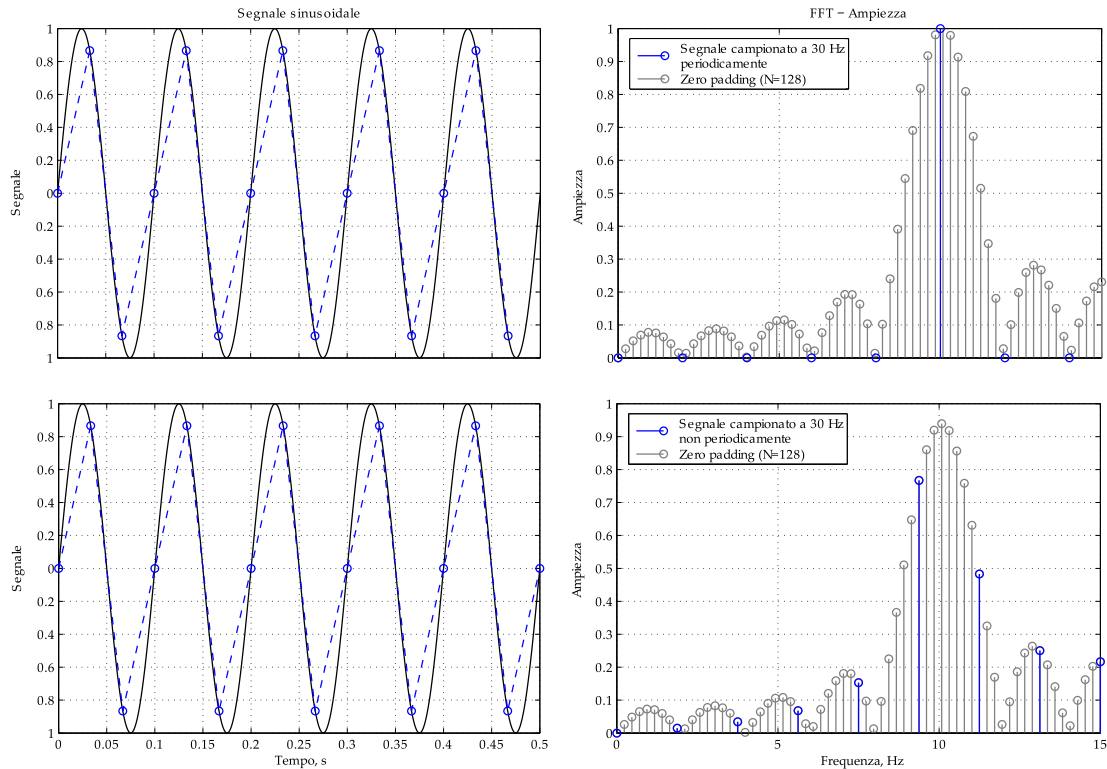


Figura A.10: Incremento della risoluzione in frequenza per effetto dello zero padding.

Si precisa, tuttavia, che il miglioramento della risoluzione in frequenza è formale, non sostanziale, giacché lo zero padding ha l'effetto di un'interpolazione dei risultati dell'analisi spettrale, che però restano invariati. In effetti, affinché l'ampiezza dei frequency bin non risenta dell'operazione di zero padding è necessario che le quantità $1/N$ e $2/N$ che premoltiplicano le serie contenute nelle relazioni (2.30) e (2.34), contengano il valore di N relativo al segnale originario, scevro degli zero aggiunti.

Si considerino nuovamente i grafici riportati in Figura A.3, relativi a un segnale sinusoidale $y = \sin(2\pi f t)$ con frequenza $f = 10$ Hz e campionato con frequenza 30 Hz. Imponendo, tramite l'operazione di zero padding, che i segnali ottenuti campionando sia periodicamente sia non rispettando la periodicità, constino di $N = 2^7 = 128$ intervalli, si ottengono i risultati di Figura A.10. In particolare, i benefici perseguibili per effetto dell'interpolazione sono evidenti nel caso di segnale campionato non periodicamente (due grafici in basso di Figura A.10).

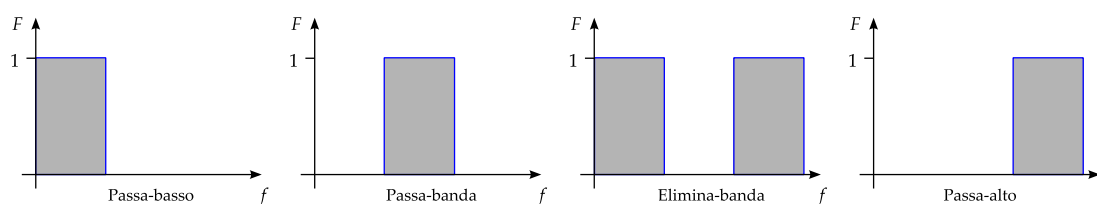


Figura A.11: Possibili filtri reali.

A.6 Zoom e averaging

Nei paragrafi precedenti si è illustrato come l'utilizzo di opportune finestre temporali, di un filtro anti-alias, di uno zero padding, oltre che l'aumento della frequenza di campionamento, sono tutti accorgimenti che permettono di incrementare la qualità delle elaborazioni effettuate con la trasformata discreta di Fourier; altri due metodi utili allo scopo sono lo *zoom* e l'*averaging*.

I filtri definiti nella teoria dei segnali, sono quattro: passa-basso, passa-banda, elimina-banda e passa alto, cfr. Figura A.11 (sono riportati i soli filtri reali, come già visto in precedenza, passando ai filtri reali bisogna calibrare opportunamente le frequenze di taglio). Tramite questi filtri è possibile manipolare il contenuto spettrale del segnale e, in particolare, utilizzando un filtro passa-banda, operare uno zoom nell'intervallo di frequenze di maggiore interesse.

I segnali reali non hanno carattere deterministico, ma aleatorio. Per questo motivo si effettua spesso un'operazione di estrazione del segnale, per poi eseguire la trasformata su ognuno dei singoli intervalli e stimare il risultato atteso tramite un'operazione di media. Da un punto di vista pratico, è importante effettuare la suddivisione del tempo di registrazione T_c del segnale in maniera appropriata: con riferimento alla Figura A.12, i risultati di letteratura mostrano che conviene sovrapporre tra loro le porzioni di campioni, piuttosto che adoperare una ripartizione sequenziale, e forniscono inoltre dei metodi di scelta per il numero di intervalli p .

Bibliografia

- [A.1] A. Brandt. *"Noise and vibration analysis: signal analysis and experimental procedures"*. John Wiley & Sons, 1^a edizione, 2011.
- [A.2] J. W. Cooley e J. W. Tukey. *"An algorithm for the machine calculation of complex Fourier series"*. American Mathematical Society, 19(90):297–301, 1965.

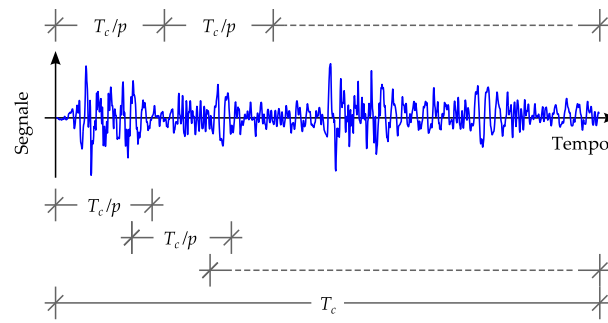


Figura A.12: Averaging: in alto sequenziale, in basso sovrapposto.



[A.3] M. Luise e G. M. Vitetta. *“Teoria dei segnali”*. McGraw Hill, 1^a edizione, 1999.

Appendice B

Caratterizzazione di una variabile aleatoria

B

Si richiamano alcune relazioni notevoli utili per la caratterizzazione delle variabili aleatorie; informazioni più dettagliate sono reperibili nell'ampia letteratura disponibile, come [B.1], per i concetti base della teoria delle probabilità e dei processi stocastici, e [B.2, 3], per i fondamenti della dinamica aleatoria.

B.1 Generalità, momenti, dipendenza

Una variabile *aleatoria* o casuale è un ente matematico capace di descrivere un evento i cui risultati, differentemente dal caso deterministico, non hanno carattere certo. Nella teoria assiomatica della probabilità (Kolmogorov), detta x la variabile aleatoria, essa è caratterizzabile per tramite dei *momenti*:

$$m_n = E[x^n]$$

con $E[x^n]$ l'*operatore media stocastica* definito come:

$$E[x^n] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n p_x(x) dx$$

nel caso di variabile aleatoria continua ($p_x(x)$ funzione densità di probabilità), e:

$$E[x^n] = \sum_{k=1}^N \frac{x_k^n}{N}$$

nel caso di variabile aleatoria discreta (N numero di campioni).

Si definiscono inoltre i *momenti centrali*:

$$\mathfrak{M}_n = E[(x - m_1)^n]$$

Ai fini del calcolo, è utile ricordare le seguenti tre proprietà dell'operatore media stocastica, di facile dimostrazione:

- media stocastica di una costante: la media stocastica di una costante a coincide con la costante stessa

$$E[a] = a$$

- monotonia: se una variabile aleatoria x assume valori sempre compresi tra due estremi a e b , anche la media stocastica di x sarà compresa nello stesso intervallo

$$E[x] \quad x \in [a, b] \quad \implies \quad a \leq E[x] \leq b$$

e, analogamente, se due variabili aleatorie verificano la condizione $x \leq y$, risulterà allora

$$E[x] \leq E[y]$$

- linearità: l'operatore media stocastica è un operatore lineare, ossia, dette x e y due variabili aleatorie e a , b e c tre costanti, si ha

$$E[ax + by + c] = aE[x] + bE[y] + c$$

È immediato verificare che le definizioni classiche di media μ_x e varianza σ_x^2 (da cui anche la deviazione standard σ_x) si ottengono come:

$$\mu_x = m_1 \quad \sigma_x^2 = \mathfrak{M}_2$$

da cui anche la definizione ampiamente utilizzata del coefficiente di variazione:

$$cv_x = \frac{\sigma_x}{\mu_x} = \frac{\sqrt{\mathfrak{M}_2}}{m_1}$$

Dette x e y due variabili aleatorie, una grandezza d'interesse è la covarianza $Cov(x, y)$ tra le due, che rappresenta una misura della loro dipendenza. In particolare, si definisce covarianza il valore atteso dei prodotti delle loro distanze dalla media:

$$Cov(x, y) = E[(x - E[x])(y - E[y])]$$

Per la linearità del valore atteso:

$$E[xy - xE[y] - E[x]y + E[x]E[y]] = E[xy] - E[x]E[y] - E[x]E[y] + E[x]E[y] = E[xy] - E[x]E[y]$$

la covarianza si può anche esprimere come la differenza tra il valore atteso del prodotto e il prodotto dei valori attesi:

$$\text{Cov}(x, y) = E[xy] - E[x]E[y]$$

Si può facilmente dimostrare che la covarianza gode altresì delle seguenti proprietà:

$$\begin{cases} \text{Cov}(x, y) = \text{Cov}(y, x) \\ \text{Cov}(ax + b, y) = a\text{Cov}(x, y) \\ \text{Cov}(x + y, z) = \text{Cov}(x, z) + \text{Cov}(y, z) \\ \text{Cov}(x, x) = \sigma_x \end{cases}$$

con x, y e z variabili aleatorie e a e b due costanti.

Infine, se x e y sono due variabili indipendenti, allora la loro covarianza è nulla, $E[xy] = E[x]E[y]$; non vale in generale il viceversa: due variabili aleatorie possono essere non correlate, ossia avere covarianza nulla, ma dipendenti.

B.2 Funzione caratteristica

Detta x una variabile aleatoria e ϑ un parametro reale, si definisce come *funzione caratteristica* $\mathfrak{F}_x(\vartheta)$ la media stocastica della funzione $e^{-i\vartheta x}$:

$$\mathfrak{F}_x(\vartheta) = E[e^{-i\vartheta x}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\vartheta x} p_x(x) dx$$

vale a dire, la trasformata di Fourier della funzione densità di probabilità.

Utilizzando uno sviluppo in serie di Taylor intorno al valore $\vartheta = 0$ del parametro è possibile fornire un'interpretazione notevole dei momenti di una distribuzione. Infatti, sviluppando $\mathfrak{F}_x(\vartheta)$ si ha:

$$\mathfrak{F}_x(\vartheta) = \mathfrak{F}_x(\vartheta) \Big|_{\vartheta=0} + \frac{d\mathfrak{F}_x(\vartheta)}{d\vartheta} \Big|_{\vartheta=0} \vartheta + \frac{1}{2} \frac{d^2\mathfrak{F}_x(\vartheta)}{d\vartheta^2} \Big|_{\vartheta=0} \vartheta^2 + \dots$$

e poiché:

$$\frac{d^n \mathfrak{F}_x(\vartheta)}{d\vartheta^n} \Big|_{\vartheta=0} = \int_{-\infty}^{\infty} (-ix)^n e^{-i\vartheta x} p_x(x) dx \Big|_{\vartheta=0} = (-i)^n \int_{-\infty}^{\infty} x^n p_x(x) dx$$

si ottiene che:

$$m_n(x) = \frac{1}{(-i)^n} \frac{d^n \mathfrak{F}_x(\vartheta)}{d\vartheta^n} \Big|_{\vartheta=0}$$

ovvero, il momento di ordine n corrisponde, a meno del termine $1/(-i)^n$, alla derivata n -esima della funzione caratteristica valutata nel punto di nullo del parametro.

Pertanto, i momenti possono essere utilizzati per costruire lo sviluppo in serie di Taylor della funzione caratteristica:

$$\mathfrak{F}_x(\vartheta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} m_n(x) \vartheta^n$$

e quindi, tramite la trasformata inversa di Fourier, la distribuzione di probabilità associata:

$$p_x(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathfrak{F}_x(\vartheta) e^{i\vartheta x} d\vartheta$$

B.3 Distribuzioni gaussiane

Di ampio utilizzo sono le variabili aleatorie continue di tipo gaussiano (o normale), le cui distribuzioni sono univocamente definite proprio dalla conoscenza di media e varianza:

$$p_x(x) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu_x)^2}{2\sigma_x^2}}$$

vale a dire, tutti i momenti dipendono esclusivamente da μ e σ^2 , cfr. Tabella B.1 (la notazione $!!$ denota il doppio fattoriale, e.g., $7!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 105$).

Inoltre, nel caso di variabili gaussiane vale un'altra proprietà di grande interesse; detta y una variabile aleatoria trasformazione lineare di una variabile gaussiana x :

$$y = a + bx$$

con a e b costanti, anche y ha una distribuzione gaussiana, di media e varianza pari a:

$$\mu_y = a + b\mu_x \quad \sigma_y^2 = b^2\sigma_x^2$$

Se y è una variabile aleatoria trasformazione lineare di s variabili gaussiane $x_1, x_2, \dots, x_s$ indipendenti:

$$y = a + b_1x_1 + b_2x_2 + \dots + b_sx_s$$

con a e $b_1, b_2, \dots, b_s$ costanti, y continua ad avere una distribuzione gaussiana, e le espressioni precedenti di media e varianza si generalizzano nelle:

$$\mu_y = a + b_1\mu_{x_1} + b_2\mu_{x_2} + \dots + b_s\mu_{x_s} \quad \sigma_y^2 = b_1^2\sigma_{x_1}^2 + b_2^2\sigma_{x_2}^2 + \dots + b_s^2\sigma_{x_s}^2$$

Vale la pena precisare che queste ultime due relazioni sono valide per qualsiasi set di variabili $x_1, x_2, \dots, x_s$ indipendenti, anche se non gaussiane, ma in tal caso pure y sarà, in generale, non gaussiana.

Ordine	Momenti m_n	Momenti centrali $\mathfrak{M}_n$
1	μ	0
2	$\mu^2 + \sigma^2$	σ^2
3	$\mu^3 + 3\mu\sigma^2$	0
4	$\mu^4 + 6\mu^2\sigma^2 + 3\sigma^4$	$3\sigma^4$
5	$\mu^5 + 10\mu^3\sigma^2 + 15\mu\sigma^4$	0
6	$\mu^6 + 15\mu^4\sigma^2 + 45\mu^2\sigma^4 + 15\sigma^6$	$15\sigma^6$
7	$\mu^7 + 21\mu^5\sigma^2 + 105\mu^3\sigma^4 + 105\mu\sigma^6$	0
8	$\mu^8 + 28\mu^6\sigma^2 + 210\mu^4\sigma^4 + 420\mu^2\sigma^6 + 105\sigma^8$	$105\sigma^8$
...	...	...
n	$\mu m_{n-1} + \sigma^2(n-1)m_{n-2}, n > 2$	$\begin{cases} \sigma^n (n-1)!! & \text{se } n \text{ è pari,} \\ 0 & \text{se } n \text{ è dispari.} \end{cases}$

Tabella B.1: Espressioni dei momenti centrali e non di una variabile gaussiana di media μ e varianza σ^2 .

Una giustificazione matematica all'evidenza che la statistica di molti fenomeni naturali tende ad assumere una distribuzione normale è poi fornita dal *teorema del limite centrale*. Il teorema stabilisce che se $x_1, x_2, \dots, x_s$ sono s variabili gaussiane indipendenti, la loro somma:

$$y = x_1 + x_2 + \dots + x_s$$

tende a una variabile normale (gaussiana) per $s \rightarrow \infty$ (purché nessuna delle variabili contribuisca in maniera preponderante alla somma).

Per misurare quanto una variabile aleatoria si discosta da una distribuzione gaussiana si usano spesso due indici sintetici, il coefficiente di asimmetria e quello di eccesso. Il coefficiente di asimmetria o *Skewness* si scrive:

$$\gamma_a = \frac{\mathfrak{M}_3}{\sigma^3}$$

ed è una misura dell'asimmetria della distribuzione, mentre il coefficiente di eccesso o *Kurtosis in eccesso* si scrive (la definizione di kurtosis in eccesso si differenzia da quella della kurtosis per la presenza del termine -3):

$$\gamma_e = \frac{\mathfrak{M}_4}{\sigma^4} - 3$$

ed è una misura della curvatura della distribuzione. Siccome i due coefficienti, che sono di fatto dei momenti centrali normalizzati, sono entrambi nulli nel caso di distribuzione

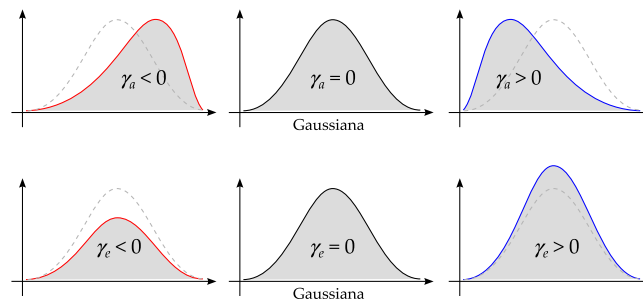


Figura B.1: Esempificazione del coefficiente di asimmetria γ_a e del coefficiente di eccesso γ_e .

gaussiana, cfr. Tabella B.1, essi possono essere utilizzati per misurare in forma sintetica lo scostamento della distribuzione in analisi da quella normale, vedi Figura B.1.



Bibliografia

- [B.1] M. G. Bulmer. *"Principles of Statistics"*. Dover Publications, 2^a edizione, 1979.
- [B.2] R. W. Clough e J. Penzien. *"Dynamics of structures"*. Computers & Structures, Inc., 3^a edizione, 2003.
- [B.3] G. Muscolino. *"Dinamica delle strutture con fondamenti ed applicazioni di ingegneria sismica e dinamica aleatoria"*. Pitagora Editrice Bologna, 1^a edizione, 2012.

Appendice C

Versioni avanzate della trasformata Wavelet e di Hilbert



Nel § 5.2 si è visto che tanto la trasformata Wavelet, quanto quella di Hilbert, tendono a fornire delle localizzazioni tempo-frequenza non ottimali, nel primo caso per effetto dell'uso di una mother wavelet non opportunamente calibrata, nel secondo a causa dell'operazione di derivazione. I paragrafi che seguono considerano due versioni migliorate di entrambe le trasformate atte a ridurre i citati fenomeni di dispersione.

C.1 Trasformata Wavelet: mother wavelet di Morlet complessa

L'utilizzo di una mother wavelet a struttura prefissata, come per i casi già visti di Morlet, del cappello messicano e della gaussiana, non conduce, in generale, a una buona localizzazione tempo-frequenza. Allo scopo è necessario, infatti, ricorrere a espressioni in cui sia possibile calibrare la mother wavelet allo specifico caso in analisi.

Una delle trasformate più utilizzate a questo scopo è la mother wavelet di Morlet complessa [C.1]:

$$\psi(\tau) = \frac{1}{\sqrt{\pi f_b}} e^{2i\pi f_c \tau} e^{-\tau^2 / f_b}$$

dove f_b e f_c sono due parametri che regolano, rispettivamente, la larghezza di banda e la frequenza centrale dell'onda. Il beneficio che si può ottenere in termini di risoluzione

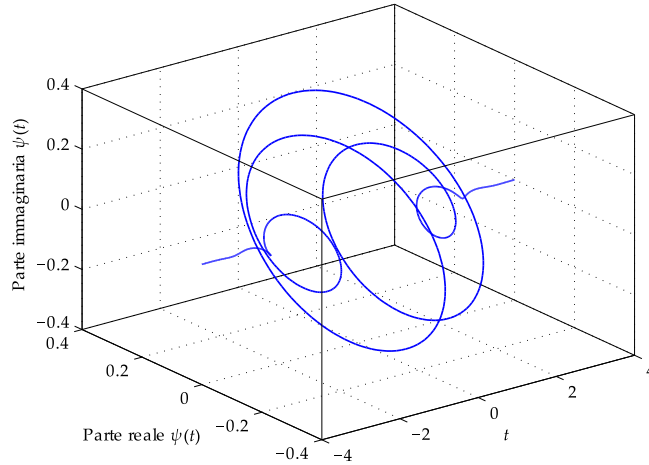


Figura C.1: Grafico tridimensionale della mother wavelet di Morlet complessa ($f_b = 2$, $f_c = 1$, $a = 1$, $b = 0$).

utilizzando questa mother wavelet risiede proprio nella dipendenza da questi due parametri, che è possibile settare in foggia aderente alle caratteristiche del segnale in analisi. Ad esempio, in Figura C.1 è mostrato l'andamento della mother wavelet di Morlet complessa con $f_b = 2$ e $f_c = 1$ ($a = 1$ e $b = 0$); lo stesso andamento è riportato in Figura C.2 in termini di parte reale, parte immaginaria, modulo e angolo di fase.

Nelle applicazioni pratiche, essendo necessario fissare a priori la larghezza di banda e la frequenza centrale, è in genere utile eseguire un'analisi conoscitiva preliminare (adoperando una delle mother wavelet di cui al § 5.2 o, eventualmente, trasformate di altro tipo, Fourier, ...) e poi procedere per tentativi.

C.2 Trasformata di Hilbert: metodo di Savitzky e Golay

Per la trasformata di Hilbert si è visto che, anche con riferimento a un segnale non corrotto da rumore, il calcolo della frequenza istantanea per mera derivazione può condurre a indesiderate oscillazioni. Per ridurre tale tipo di imprecisioni numeriche è necessario utilizzare un'opportuna tecnica di regolarizzazione o di smoothing.

Un metodo diffuso per regolarizzare un insieme di dati e/o le sue derivate è il metodo di Savitzky e Golay [C.2]. La tecnica, usata principalmente nel campo della chemiometria, è basata sulla costruzione di un filtro digitale in cui l'insieme dei dati è dapprima scomposto in più porzioni (o segmenti) e poi ricostruito tramite una stima ai minimi quadrati di una successione di polinomi (di grado scelto) ognuno dei quali approssimante un certo segmento. Il vantaggio ai fini differenziali è che, noti i poli-

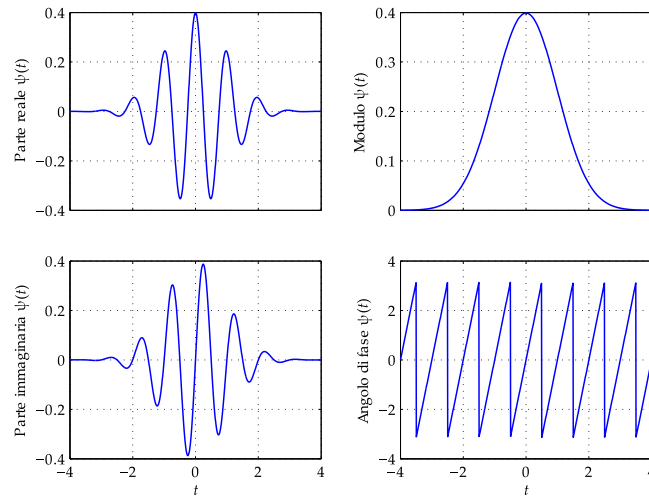


Figura C.2: Rappresentazioni piane della mother wavelet di Morlet complessa ($f_b = 2$, $f_c = 1$, $a = 1$, $b = 0$): in alto a sinistra la parte reale, in basso a sinistra la parte immaginaria, in alto a destra il modulo, in basso a destra l'angolo di fase.

nomi, la derivata del segnale dato è calcolabile semplicemente tramite derivazione dei polinomi stessi.

Per come è definito, appare evidente che il risultato ottenuto è una diretta conseguenza delle scelte effettuate per l'ordine del polinomio oltre che per la lunghezza del segmento. Un metodo basilare per fissare queste due opzioni (anche questo mutuato dal campo della chemiometria) è il seguente: si utilizza un polinomio di grado n_{SG} contenuto (terzo al più) e si adopera la full width at half maximum (in italiano "larghezza a metà altezza", ossia la differenza fra i valori assunti dalla variabile indipendente quando la variabile dipendente o segnale è pari a metà del suo valore di picco) per la selezione dell'intervallo. Poiché nel caso di segnale sinusoidale $y = \sin(x)$ si ha $y = 1/2$ in corrispondenza di $x = \{\pi/6, 5\pi/6\}$, la larghezza a metà altezza è pari a $2\pi/3$; estendendo il concetto a un generico segnale sinusoidale $a \sin(2\pi ft)$ di frequenza f e con a una costante generica, è immediato ottenere $1/(3f)$ come larghezza a metà altezza. In altri termini, ogni oscillazione sinusoidale è analizzata tramite approssimazione con tre polinomi. In definitiva, per il calcolo del numero di punti L_{SG} da utilizzare nel caso generico di interesse (multi-frequenza e discreto) appare ragionevole assumere come valore di prima stima (da aggiornare, all'uopo, per tentativi):

$$l_{SG} = \lfloor \frac{f_s}{3f_{max}} \rfloor + 1$$

con f_s la frequenza di campionamento, f_{max} la massima frequenza di interesse contenuta nel segnale, e dove l'operazione $\lfloor \cdot \rfloor$ indica la parte intera della quantità in argomento.

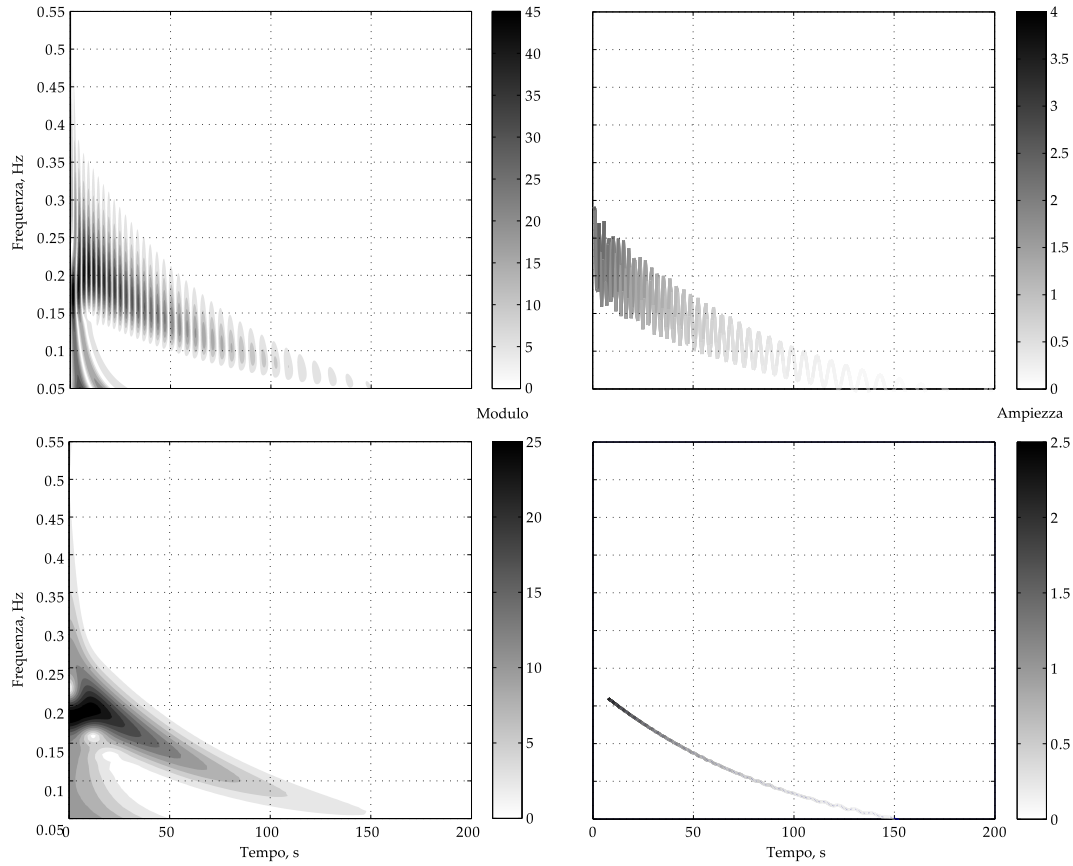


Figura C.3: Analisi tempo-frequenza della risposta di un oscillatore di Duffing: a sinistra le trasformate Wavelet (con la mother wavelet di Morlet, in alto, e di Morlet complessa, in basso), a destra quelle di Hilbert (senza, in alto, e con, in basso, la regolarizzazione di Savitzky e Golay).

C.3 Esempio

Si analizza nuovamente la risposta dell'oscillatore di Duffing non forzato di cui al § 5.2.1.1.

I risultati ottenuti utilizzando la mother wavelet di Morlet complessa ($f_b = 1$ e $f_c = 2$), per la trasformata Wavelet, e il metodo di Savitzky e Golay ($n_{SG} = 1$ e $l_{SG} = 1501$), per la trasformata di Hilbert, sono riportati in Figura C.3. In particolare, per fini comparativi, i grafici sulla sinistra riportano i risultati ottenuti con le due mother wavelet di Morlet, in alto (cfr. Figura 5.8), e di Morlet complessa, in basso, mentre i grafici sulla destra mostrano gli andamenti relativi alla trasformata di Hilbert nella versione senza, in alto (cfr. Figura 5.9), e con, in basso, la regolarizzazione di Savitzky e Golay.

Dall'analisi dei grafici, è immediato constatare i benefici apportati dalle versioni

migliorate della trasformata Wavelet e di Hilbert: in entrambi i casi si ottiene un incremento notevole della localizzazione tempo-frequenza, anche se per la trasformata Wavelet, a causa del principio di indeterminazione tonale discusso al § 5.2.3, l'andamento continua mostrare a un certo grado di dispersione, oltre che i già discussi problemi di bordo.



Bibliografia

- [C.1] T. P. Le e P. Argoul. *“Continuous Wavelet transform for modal identification using free decay response”*. *Journal of Sound and Vibration*, 277(1-2):73–100, 2004.
- [C.2] A. Savitzky e M. J. E. Golay. *“Smoothing and differentiation of data by simplified least squares procedures”*. *Analytical Chemistry*, 36(8):1627–1639, 1964.

Pagina lasciata intenzionalmente bianca.

Bibliografia

- 1 Decreto Ministeriale 14/01/2008. *“Approvazione delle nuove norme tecniche per le costruzioni”*. Gazzetta Ufficiale n. 29 del 04/02/2008, Suppl. Ordinario n. 30.
- 2 S. Adhikari. *“Uncertainty propagation in linear systems: an exact solution using random matrix theory”*. 48th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics & Materials Conference, 2007.
- 3 S. Adhikari e M. I. Friswell. *“Random eigenvalue problems in structural dynamics”*. 45th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics & Materials Conference, 2004.
- 4 S. Adhikari e R. S. Langley. *“Distribution of eigenvalues of linear stochastic systems”*. 9th International Conference on Applications of Statistics and Probability in Civil Engineering, ICASP, 2003.
- 5 M. Al-Qassab e S. Nair. *“Wavelet-Galerkin method for the free vibrations of an elastic cable carrying an attached mass”*. Journal of Sound and Vibration, 270(1):191–206, 2004.
- 6 R. J. Allemang. *“The Modal Assurance Criterion (MAC): twenty years of use and abuse”*. Sound and Vibration Magazine, 37(8):14–23, 2003.
- 7 R. J. Allemang e D. L. Brown. *“A correlation coefficient for modal vector analysis”*. 1st International Modal Analysis Conference, IMAC, 1982.
- 8 K. F. Alvin, A. N. Robertson, G. W. Reich, e K. C. Park. *“Structural system identification: from reality to models”*. Computers & Structures, 81(12):1149–1176, 2003.
- 9 G. W. Anderson, A. Guionnet, e O. Zeitouni. *“An introduction to random matrices”*. Cambridge University Press, 1^a edizione, 2009.

- 10 D. W. Apley, J. Liu, e W. Chen. "Understanding the effects of model uncertainty in robust design with computer experiments". *Journal of Mechanical Design*, 128(1):946–958, 2006.
- 11 J. L. Beck e L. S. Katafygiotis. "Probabilistic system identification and health monitoring of structures". *10th Earthquake Engineering, WCEE*, 1992.
- 12 S. Benfratello e G. Muscolino. "A perturbation approach for the response of dynamically modified structural systems". *Computers & Structures*, 68(1-3):101–112, 1998.
- 13 A. Brandt. "Noise and vibration analysis: signal analysis and experimental procedures". John Wiley & Sons, 1^a edizione, 2011.
- 14 R. Brincker, L. Zhang, e P. Andersen. "Modal identification from ambient response using Frequency Domain Decomposition". *18th International Modal Analysis Conference, IMAC*, 2000.
- 15 R. Brincker, L. Zhang, e P. Andersen. *Modal identification of output-only systems using frequency domain decomposition*. *Smart Materials and Structures*, 10(3):441–446, 2001.
- 16 M. G. Bulmer. "Principles of Statistics". Dover Publications, 2^a edizione, 1979.
- 17 E. P. Carden e P. Fanning. "Vibration-based condition monitoring: a review". *Structural Health Monitoring*, 3(4):355–377, 2004.
- 18 A. Carrella e D. J. Ewins. "Identifying and quantifying structural nonlinearities in engineering applications from measured frequency response functions". *Mechanical Systems and Signal Processing*, 25(3):1011–1027, 2011.
- 19 N. Cheraghi e F. Taheri. "A damage index for structural health monitoring based on the empirical mode decomposition". *Journal of Mechanics of Materials and Structures*, 2(1):43–61, 2007.
- 20 A. K. Chopra. "Dinamycs of structures", volume 2 di *Engineering monographs on earthquake criteria, structural design, and strong motion records*. Earthquake engineering research institute, 1^a edizione, 1980.
- 21 R. W. Clough e J. Penzien. "Dynamics of structures". Computers & Structures, Inc., 3^a edizione, 2003.
- 22 J. W. Cooley e J. W. Tukey. "An algorithm for the machine calculation of complex Fourier series". *American Mathematical Society*, 19(90):297–301, 1965.

-
- 23 P. J. S. Cruz e R. Salgado. "Performance of vibration-based damage detection methods in bridges". *Computer-Aided Civil and Infrastructure Engineering*, 24(1):62–79, 2009.
- 24 J. A. Demarchi e K. C. Craig. Comments on "Natural frequencies and dampings identification using Wavelet transform: application to real data". *Mechanical Systems and Signal Processing*, 17(2):483–488, 2003.
- 25 A. Dixit. "Damage modeling and damage detection for structures using a perturbation method". Tesi di dottorato - Georgia Institute of Technology, 2012.
- 26 S. W. Doebling, C. R. Farrar, M. B. Prime, e D. W. Shevitz. "Damage identification and health monitoring of structural and mechanical systems from changes in their vibration characteristics: a literature review". Technical Report Los Alamos National Laboratory, LA-13070-MS, 1996.
- 27 Y. Dong, Y. Li, e M. Lai. "Structural damage detection using Empirical Mode Decomposition and Vector AutoRegressive Roving Average model". *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 30(3):133–145, 2010.
- 28 I. Elishakoff, Y. J. Ren, e M. Shinozuka. "Improved finite element method for stochastic structures". *Chaos Solit. Fract.*, 5(5):833–846, 1995.
- 29 D. J. Ewins. "Modal testing: theory and practice", volume 2 di *Engineering dynamics series*. Research Studies Press, 1^a edizione, 1984.
- 30 G. Falsone e N. Impollonia. "A new approach for the stochastic analysis of finite element modelled structures with uncertain parameters". *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 191(44):5067–5085, 2002.
- 31 W. Fan e P. Qiao. "Vibration-based damage identification methods: a review and comparative study". *Structural Health Monitoring*, 10(1):83–111, 2011.
- 32 C. R. Farrar e K. Worden. "An introduction to structural health monitoring". *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 365(1851):303–315, 2007.
- 33 C. R. Farrar e K. Worden. "Structural health monitoring: a machine learning perspective". John Wiley & Sons, 1^a edizione, 2012.
- 34 C. H. J. Fox. "The location of defects in structures. A comparison of the use of natural frequency and mode shape data". 10th International Modal Analysis Conference, IMAC, 1992.

-
- 35 Z. F. Fu e J. He. *"Modal analysis"*. Elsevier Science, 1^a edizione, 2001.
- 36 A. Garcia-Perez, J. P. Amezquita-Sanchez, A. Dominguez-Gonzalez, R. Sedaghati, R. Osornio-Rios, e R. J. Romero-Troncoso. *"Fused Empirical Mode Decomposition and Wavelets for locating combined damage in a truss-type structure through vibration analysis"*. *Journal of Zhejiang University SCIENCE A*, 14(9):615–630, 2013.
- 37 S. Gopalakrishnan, M. Ruzzenne, e S. Hanagud. *"Computational techniques for structural health monitoring"*. Springer, 1^a edizione, 2011.
- 38 M. R. Hajj, J. Fung, A. H. Nayfeh, e S. O'F. Fahey. *"Damping identification using perturbation techniques and higher-order spectra"*. *Nonlinear Dynamics*, 23(2):189–203, 2000.
- 39 S. Hans, E. Ibraim, S. Pernot, C. Boutin, e C. H. Lamarque. *"Damping identification in Multi-Degree-Of-Freedom system via a Wavelet-Logarithmic Decrement. Part 2: Study of a civil engineering building"*. *Journal of Sound and Vibration*, 235(3):375–403, 2000.
- 40 S. Hassiotis e G. D. Jeong. *"Identification of stiffness reductions using natural frequencies"*. *Journal of Engineering Mechanics*, 121(10):1106–1113, 1995.
- 41 T. Y. Hou, M. P. Yan, e Z. Wu. *"A variant of the EMD for multi-scale data"*. *Advances in Adaptive Data Analysis*, 1(4):483–516, 2009.
- 42 Z. Hou, M. Noori, e R. Amand. *"Wavelet-based approach for structural damage detection"*. *Journal of Engineering Mechanics*, 126(7):677–683, 2000.
- 43 N. E. Huang e S. S. P. Shen. *"Hilbert-Huang transform and its applications"*, volume 5 di *Interdisciplinary Mathematical Sciences. Proceedings of the Royal Society of London. Series A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 1^a edizione, 2005.
- 44 N. E. Huang, Z. Shen, S. R. Long, M. C. Wu, H. H. Shih, Q. Zheng, N. C. Yen, C. C. Tung, e H. H. Liu. *"The Empirical Mode Decomposition and the Hilbert spectrum for nonlinear and nonstationary time series analysis"*. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 454(1971):903–995, 1998.
- 45 T. L. Huang, W. X. Ren, e M. L. Lou. *"The Orthogonal Hilbert-Huang transform and its application in earthquake motion recordings analysis"*. *14th World Conference on Earthquake Engineering, WCEE*, 2008.

-
- 46 N. Impollonia e G. Muscolino. "Static and dynamic analysis of non-linear uncertain structures". *Meccanica*, 37(1-2):179–192, 2002.
- 47 J. N. Juang e M. Q. Phan. "Identification and control of mechanical systems". Cambridge University Press, 1^a edizione, 2001.
- 48 M. Kaminski. "Generalized stochastic perturbation technique in engineering computations". *Mathematical and Computer Modelling*, 51(3-4):272–285, 2010.
- 49 D. N. Kaslovsky e F. G. Meyer. "Noise corruption of Empirical Mode Decomposition and its effect on instantaneous frequency". *Advances in Adaptive Data Analysis*, 2(3):373–396, 2010.
- 50 T. Kato. "Perturbation theory for linear operators". Springer-Verlag, 2^a edizione, 1995.
- 51 C. C. Kennedy e C. D. P. Pancu. "Use of vectors in vibration measurement and analysis". *Journal of the Aeronautical Sciences*, 14(11):603–625, 1947.
- 52 G. Kerschen, A. F. Vakakis, Y. S. Lee, D. M. McFarland, e L. A. Bergman. "Toward a fundamental understanding of the Hilbert-Huang transform in nonlinear structural dynamics". *Journal of Vibration and Control*, 14(1-2):77–105, 2008.
- 53 G. Kerschen, K. Worden, A. F. Vakakis, e J. C. Golinval. "Past, present and future of nonlinear system identification in structural dynamics". *Mechanical Systems and Signal Processing*, 20(1):505–592, 2006.
- 54 H. H. Khodaparast, J. E. Mottershead, e M. I. Friswell. "Perturbation methods for the estimation of parameter variability in stochastic model updating". *Mechanical Systems and Signal Processing*, 22(8):1751–1773, 2008.
- 55 D. Kim e H. S. Oh. "EMD: a package for Empirical Mode Decomposition and Hilbert spectrum". *The R Journal*, 1(1):40–46, 2009.
- 56 Y. Kopsinis e S. McLaughlin. "Improved EMD using doubly-iterative sifting and high order spline interpolation". *EURASIP Journal on Advances in Signal Processing*, 2008(1):1–8, 2008.
- 57 A. Kunwar, R. Jha, M. Whelan, e K. Janoyan. "Damage detection in an experimental bridge model using Hilbert-Huang transform of transient vibrations". *Structural Control and Health Monitoring*, 20(1):1–15, 2013.
- 58 M. Kurata, J. Kim, J. P. Lynch, K. H. Law, e L. W. Salvino. "A probabilistic model updating algorithm for fatigue damage detection in aluminum hull structures". *ASME*

- 2010 Conference on Smart Materials, Adaptive Structures and Intelligent Systems, SMASIS, 2010.
- 59 C. H. Lamarque, S. Pernot, e A. Cuer. "Damping identification in Multi-Degree-Of-Freedom system via a Wavelet-Logarithmic Decrement. Part 1: Theory". *Journal of Sound and Vibration*, 235(3):361–374, 2000.
 - 60 J. Lardies e S. Gouttebroze. "Identification of modal parameters using the Wavelet transform". *International Journal of Mechanical Sciences*, 44(11):2263–2283, 2002.
 - 61 T. P. Le e P. Argoul. "Continuous Wavelet transform for modal identification using free decay response". *Journal of Sound and Vibration*, 277(1-2):73–100, 2004.
 - 62 R. Lebrun e A. Dutfoy. "Do Rosenblatt and Nataf isoprobabilistic transformations really differ?". *Probabilistic Engineering Mechanics*, 24(4):172–178, 2009.
 - 63 Y. Lei, Y. Su, e W. Shen. "A probabilistic damage identification approach for structures under unknown excitation and with measurement uncertainties". *Journal of Applied Mathematics*, 2013(1):1–8, 2013.
 - 64 M. Lepidi. "Multi-parameter perturbation methods for the eigensolution sensitivity analysis of nearly-resonant non-defective multi-degree-of-freedom systems". *Journal of Sound and Vibration*, 332(4):1011–1032, 2013.
 - 65 M. Lepidi, V. Gattulli, e F. Vestroni. "Damage identification in elastic suspended cables through frequency measurement". *Journal of Vibration and Control*, 15(6):867–896, 2009.
 - 66 H. Li, X. Deng, e H. Dai. "Structural damage detection using the combination method of EMD and Wavelet analysis". *Mechanical Systems and Signal Processing*, 21(1):298–306, 2007.
 - 67 J. Li e J. B. Roberts. "Stochastic structural system identification. Part 1: Mean parameter estimation". *Computational Mechanics*, 24(3):206–210, 1999.
 - 68 J. Li e J. B. Roberts. "Stochastic structural system identification. Part 2: Variance parameter estimation". *Computational Mechanics*, 24(3):211–215, 1999.
 - 69 N. A. J. Lieven e D. J. Ewins. "Spatial correlation of mode shapes, the coordinate modal assurance criterion (COMAC)". *6th International Modal Analysis Conference, IMAC*, 1988.
 - 70 L. Ljung. "System identification: theory for the user". Pearson Education Canada, 2^a edizione, 1987.

-
- 71 E. Lofrano, A. Paolone, e F. Romeo. *"Damage identification in a parabolic arch through the combined use of modal properties and Empirical Mode Decomposition"*. 9th International Conference On Structural Dynamics, EURODYN, 2014.
- 72 E. Lofrano, A. Paolone, e M. Vasta. *"A perturbation approach for the identification of uncertain structures"*. 8th European Nonlinear Dynamics Conferences, ENOC, 2014.
- 73 M. Luise e G. M. Vitetta. *"Teoria dei segnali"*. McGraw Hill, 1^a edizione, 1999.
- 74 A. Luongo. *"Metodi perturbativi nell'analisi agli autovalori di strutture imperfette ad elevata densità modale. Parte 1: Teoria"*. Atti Accademia Peloritana dei Pericolanti - Classe I di Scienze Fis. Mat. e Nat., 68(1):401–423, 1988.
- 75 A. Luongo. *"Eigensolutions sensitivity for nonsymmetric matrices with repeated eigenvalues"*. AIAA Journal, 31(7):1321–1328, 1993.
- 76 J. P. Lynch e K. J. Loh. *"A summary review of wireless sensors and sensor networks for structural health monitoring"*. The Shock and Vibration Digest, 38(2):91–128, 2006.
- 77 N. M. M. Maia e J. M. M. Silva. *"Theoretical and experimental modal analysis"*, volume 9 di Engineering dynamics series. Research Studies Press, 1^a edizione, 1997.
- 78 C. S. Manohar e R. A. Ibrahim. *"Progress in structural dynamics with stochastic parameter variations: 1987 to 1996"*. Applied Mechanics Reviews, 52(5):177–197, 1999.
- 79 L. Meirovitch e M. A. Norris. *"A perturbation technique for parameter identification in distributed structures"*. Applied Mathematical Modelling, 12(2):167–174, 1988.
- 80 R. E. Miller. *"Optimization: foundations and applications"*. John Wiley & Sons, 1^a edizione, 2000.
- 81 A. Morassi. *"Identification of a crack in a rod based on changes in a pair of natural frequencies"*. Journal of Sound and Vibration, 242(4):577–596, 2001.
- 82 A. Morassi e F. Vestroni. *"Dynamic methods for damage detection in structures"*, volume 499 di CISM International Centre for Mechanical Sciences. SpringerWienNewYork, 1^a edizione, 2008.
- 83 J. Morlet, G. Arens, E. Farge, e D. Gaud. *"Wave propagation and sampling theory. Part 1: complex signal and scattering in multilayered media"*. Geophysics, 47(2):203–221, 1982.

-
- 84 J. E. Mottershead e M. I. Friswell. *"Model updating in structural dynamics: a survey"*. *Journal of Sound and Vibration*, 167(2):347–375, 2008.
- 85 J. A. Murdock. *"Perturbations. Theory and methods"*. John Wiley & Sons, 1^a edizione, 1991.
- 86 G. Muscolino. *"Dinamica delle strutture con fondamenti ed applicazioni di ingegneria sismica e dinamica aleatoria"*. Pitagora Editrice Bologna, 1^a edizione, 2012.
- 87 G. Muscolino, G. Ricciardi, e N. Impollonia. *"Improved dynamic analysis of structures with mechanical uncertainties under deterministic input"*. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 15(2):199–212, 2000.
- 88 G. Muscolino, R. Santoro, e A. Sofi. *"Explicit frequency response functions of discretized structures with uncertain parameters"*. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 133(1):64–78, 2014.
- 89 I. U. Ojalvo e D. Pilon. *"Diagnostics for geometrically locating structural math model errors from modal test data"*. 29th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics & Materials Conference, 1988.
- 90 L. Papadopoulos e E. Garcia. *"Structural damage identification: a probabilistic approach"*. *AIAA Journal*, 36(11):2137–2145, 1998.
- 91 A. Pau, A. Greco, e F. Vestroni. *"Numerical and experimental detection of concentrated damage in a parabolic arch by measured frequency variations"*. *Journal of Vibration and Control*, 17(4):605–614, 2011.
- 92 B. Peeters e G. De Roeck. *"Stochastic System Identification for Operational Modal Analysis: a review"*. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 123(4):659–667, 2001.
- 93 Z. K. Peng e F. L. Chu. *"Application of the Wavelet transform in machine condition monitoring and fault diagnostics: a review with bibliography"*. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 18(2):199–221, 2004.
- 94 S. T. Quek, P. S. Tua, e Q. Wang. *"Detecting anomalies in beams and plate based on the Hilbert-Huang transform of real signals"*. *Smart Materials and Structures*, 12(3):447–460, 2003.
- 95 L. F. Ramos, G. De Roeck, P. B. Lourenço, e A. Campos-Costa. *"Damage identification on arched masonry structures using ambient and random impact vibrations"*. *Engineering Structures*, 32(1):146–162, 2010.

-
- 96 P. Razi, R. A. Esmaeel, e F. Taheri. "Application of a robust vibration-based non-destructive method for detection of fatigue cracks in structures". *Smart Materials and Structures*, 20(11):1–12, 2011.
- 97 D. Rezaei e F. Taheri. "Experimental validation of a novel structural damage detection method based on Empirical Mode Decomposition". *Smart Materials and Structures*, 18(4):1–14, 2009.
- 98 D. Rezaei e F. Taheri. "Damage identification in beams using Empirical Mode Decomposition". *Structural Health Monitoring*, 10(3):261–274, 2010.
- 99 G. Rilling e P. Flandrin. "One or two frequencies? The Empirical Mode Decomposition answers". *Signal Processing, IEEE Transactions on*, 56(1):85–95, 2008.
- 100 G. Rilling, P. Flandrin, e P. Gonçalves. "On Empirical Mode Decomposition and its algorithms". *6th IEEE/EURASIP Workshop on Nonlinear Signal and Image Processing, NSIP*, 2003.
- 101 F. Romeo. "A wavelet based approach for structural-system parametric identification". *Tesi di dottorato - "Sapienza" Università di Roma*, 1999.
- 102 F. Romeo, E. Lofrano, e A. Paolone. "Damage identification in a parabolic arch via Orthogonal Empirical Mode Decomposition". *ASME (IDETC/CIE/VIB) Conference*, 2014.
- 103 M. Rucka. "Damage detection in beams using Wavelet transform on higher vibration modes". *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 49(2):339–417, 2011.
- 104 T. Rytter. "Vibration based inspection of civil engineering structure". *PhD dissertation - Aalborg University*, 1993.
- 105 O. S. Salawu. "Detection of structural damage through changes in frequency: a review". *Engineering Structures*, 19(9):718–723, 1997.
- 106 A. Savitzky e M. J. E. Golay. "Smoothing and differentiation of data by simplified least squares procedures". *Analytical Chemistry*, 36(8):1627–1639, 1964.
- 107 J. M. M. Silva e N. M. M. Maia. "Modal analysis and testing". *Springer Netherlands*, 1^a edizione, 1999.
- 108 J. Slavič, I. I. Simonovski, e M. Boltežar. "Damping identification using a continuous Wavelet transform: application to real data". *Journal of Sound and Vibration*, 262(2):291–307, 2003.

-
- 109 H. Sohn, C. R. Farrar, F. M. Hemez, e J. Czarnecki. *"A review of structural health monitoring literature: 1996-2001"*. Los Alamos National Laboratory, 2004.
- 110 C. Soize. *"Stochastic modeling of uncertainties in computational structural dynamics. Recent theoretical advances"*. *Journal of Sound and Vibration*, 332(10):2379–2395, 2013.
- 111 B. F. Spencer e C. B. Yun. *"Wireless sensor advances and applications for civil infrastructure monitoring"*. Newmark Structural Engineering Laboratory, 2010.
- 112 W. J. Staszewski. *"Identification of non-linear systems using multi-scale ridges and skeletons of the Wavelet transform"*. *Journal of Sound and Vibration*, 214(4):639–658, 1998.
- 113 W. J. Staszewski. *"Wavelet based compression and feature selection for vibration analysis"*. *Journal of Sound and Vibration*, 211(5):735–760, 1998.
- 114 G. Strang e G. Fix. *"An analysis of the finite element method"*. Wellesley-Cambridge Press, 2^a edizione, 2008.
- 115 J. P. Tang, D. J. Chiou, C. W. Chen, W. L. Chiang, W. K. Hsu, C. Y. Chen, e T. Y. Liu. *"A case study of damage detection in benchmark buildings using a Hilbert-Huang transform-based method"*. *Journal of Vibration and Control*, 17(4):623–636, 2011.
- 116 D. N. Thatoi, H. C. Das, e D. R. Parhi. *"Review of techniques for fault diagnosis in damaged structure and engineering system"*. *Advances in Mechanical Engineering*, 2012(1):1–11, 2012.
- 117 F. Vestroni e D. Capecchi. *"Damage evaluation in cracked vibrating beams using experimental frequencies and finite element models"*. *Journal of Vibration and Control*, 2(1):69–86, 1996.
- 118 E. Viola. *"Sistemi continui"*, volume 2 di *Fondamenti di dinamica e vibrazione delle strutture*. Pitagora Editrice Bologna, 1^a edizione, 2001.
- 119 E. Viola. *"Sistemi discreti"*, volume 1 di *Fondamenti di dinamica e vibrazione delle strutture*. Pitagora Editrice Bologna, 1^a edizione, 2001.
- 120 L. Wang, J. Zhang, C. Wang, e S. Hu. *"Identification of nonlinear systems through time-frequency filtering technique"*. *Journal of Vibration and Acoustics*, 125(2):199–204, 2003.

-
- 121 L. Wang, J. Zhang, C. Wang, e S. Hu. "Time-frequency analysis of nonlinear systems: the skeleton linear model and the skeleton curves". *Journal of Vibration and Acoustics*, 125(2):170–177, 2003.
- 122 K. Worden, C. R. Farrar, G. Manson, e G. Park. "The fundamental axioms of structural health monitoring". *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Science*, 463(2082):1639–1664, 2007.
- 123 K. Worden e G. R. Tomlinson. "Nonlinearity in structural dynamics. Detection, identification and modelling". IOP Publishing, 1^a edizione, 2001.
- 124 Z. Wu e N. E. Huasng. "Ensemble Empirical Mode Decomposition: a Noise-Assisted Data Analysis method". *Advances in Adaptive Data Analysis*, 1(1):1–41, 2009.
- 125 Y. Xia e H. Hao. "Statistical damage identification of structures with frequency changes". *Journal of Sound and Vibration*, 263(4):853–870, 2003.
- 126 Y. Xu e J. Chen. "Structural damage detection using Empirical Mode Decomposition: experimental investigation". *Journal of Engineering Mechanics*, 130(11):1279–1288, 2004.
- 127 J. N. Yang, Y. Lei, S. Pan, e N. Huang. "System identification of linear structures based on Hilbert-Huang spectral analysis. Part 1: normal modes". *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, 32(9):1443–1467, 2003.
- 128 J. N. Yang, Y. Lei, S. Pan, e N. Huang. "System identification of linear structures based on Hilbert-Huang spectral analysis. Part 2: Complex modes". *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, 32(10):1533–1554, 2003.
- 129 H. P. Yin, D. Duhamel, e P. Argoul. "Natural frequencies and damping estimation using Wavelet transform of a frequency response function". *Journal of Sound and Vibration*, 271(3-5):999–1014, 2004.