



SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

SCUOLA DI DOTTORATO IN SCIENZE STATISTICHE

Curriculum:

SCIENZE ATTUARIALI

**Un modello di Riservazione Individuale
Multistato a Tempo Discreto**

Tutor
Prof. Nino Savelli

Candidato PhD
Marco Spina
XXIX Ciclo
1204898

Tesi presentata per il Dottorato di Ricerca
Anno Accademico 2016/2017

a mia moglie Giulia

Abstract

The aim of this dissertation is to propose and to verify the operational use of a Micro-Level approach for the assessment of the outstanding claims reserve IBNR and RBNS based on the empirical application on real data of a Non-Life Italian insurer. The analysis of the results will accompany a comparison with the main Macro-Level models in terms of Expected Value and Prediction Error. The approach is based on a Marked Poisson process piecewise constant for number claims IBNR and regarding the estimate of the amount of claims RBNS we proposed the use of the ratio paid on initial reserve as the dependent variable for the estimate of future payments. The application of the model is completed by the use of bootstrapping technique for variability of model parameters and the use of parallel calculation techniques for MonteCarlo simulation routines. The thesis will also present a possible approach to aggregating variability in the case of using a plurality of models.

Lo scopo di questo lavoro è la verifica dell'utilizzo operativo di un approccio Micro-Level ai fini della stima della riserva per sinistri accaduti e non ancora pagati basata sull'applicazione empirica su dati reali di una compagnia Non-Life Italiana. L'analisi dei risultati sarà accompagnata con un confronto con i principali modelli Macro-Level sia in termini di valore atteso che di Prediction Error. L'approccio prevede l'utilizzo del processo Marked Poisson a tempo discreto per il numero di sinistri IBNR e per quanto riguarda la stima degli importi per i sinistri già denunciati a riserva, è proposto l'utilizzo del rapporto pagato su riservato iniziale come variabile dipendente per la stima dei pagamenti futuri. L'applicazione del modello è completata con l'utilizzo della tecnica bootstrapping per la variabilità dei parametri del modello e l'utilizzo di tecniche di calcolo in parallelo per la simulazione della routine. Nell'elaborato sarà inoltre presentato un possibile approccio per l'aggregazione della variabilità nel caso di utilizzo di una pluralità di modelli.

Dichiarazione

Questa tesi è il risultato del mio lavoro e non include nessun risultato di eventuali lavori svolti in collaborazione tranne come specificato nel testo. Non è sostanzialmente identico a quanto ho già presentato o che viene presentato contemporaneamente per un diploma o altro titolo presso l'Università di Roma La Sapienza” o qualsiasi altra istituzione universitaria o simile. Inoltre dichiaro che nessuna parte della mia tesi è già stata presentata o viene presentata contemporaneamente per qualsiasi diploma o altro titolo presso l'Università di Roma La Sapienza o qualsiasi altra Università di istituto simile.

Indice

Abstract	3
Dichiarazione	5
1. Introduzione	8
1.1 Background	10
1.2 Il Processo di Riservazione e Liquidazione dei sinistri.....	11
1.3 Solvency II, l'ORSA e il Reserve Risk	16
1.4 Principali modelli Macro-Level	17
1.5 Aggregazione variabilità tra modelli.....	19
2. Processo dei Numeri	21
2.1 Notazione	21
2.2 Marked Poisson non-omogeneo a tempo discreto.....	23
2.3 Modello di proiezione degli stati.....	27
3. Distribuzione degli Importi	29
3.1 Distribuzione dei pagamenti e Run-Off Riserva Case	29
3.2 Modello per la stima degli importi	33
4. Applicazione al segmento MTPL	35
4.1 I dati empirici	35
4.2 Calibrazione del modello per i numeri	38
4.3 Calibrazione del modello per gli importi	42
4.4 Risultati dei modelli di stima	49
4.5 Analisi di confronto con i modelli Macro-Level.....	54
Conclusioni e futuri sviluppi	58
Bibliografia	61
Appendice A	67
Appendice B	68

1. Introduzione

La stima della riserva per sinistri ancora da pagare rappresenta un tema di rilevanza strategica per la solvibilità finanziaria ed economica delle compagnie di assicurazione che esercitano i segmenti *Non-Life* quali *Casualty* (Responsabilità civile) e *Property* (Furto, incendio e altre tipologie di danni ai beni). Una vasta letteratura attuariale si concentra su tale tematica e nella stragrande maggioranza dei casi si è basata su modellistica di tipo *Macro-Level* (dati aggregati), il cui capostipite è il metodo Chain Ladder [\[Mack 1993\]](#). Di minor numero, con un trend in crescita negli ultimi anni, sono invece gli articoli e monografie che affrontano il tema sotto un punto di *Micro-Level* (o *Individual Claims Reserving*) cioè analizzando il fenomeno del processo di liquidazione per singolo sinistro. Tale minore diffusione, come si descriverà nel seguito, è dovuta principalmente a due fattori: il *data quality* e alla pluralità e la complessità dei fattori che possono influenzare il processo di liquidazione in oggetto. Per quanto riguarda la qualità dei dati disponibili presso le compagnie di assicurazione, in relazione al mercato Italiano, con l'avvento della normativa Solvency II [\[Solv 2009\]](#) e l'imminente entrata in vigore dei nuovi principi IFRS 17, la situazione sta significativamente migliorando visto l'elevato standard richiesto dai due *frameworks*.

Tematica di interesse analogo alla stima dell'aspettativa della riserva sinistri è la quantificazione della variabilità della riserva sinistri che ricopre un ruolo fondamentale nell'analisi di Risk Management interne alle compagnie di assicurazione ai fini della quantificazione del rischio e del relativo assorbimento di capitale associato alla gestione della riserva sinistri al suo completo pagamento. Come noto nella prassi attuariale è diffuso l'utilizzo di una pluralità di modelli [\[Friedland 2010\]](#) per la stima della riserva sinistri per tener conto delle diverse peculiarità informative dei dati di input e delle diverse ipotesi alla base dei modelli. Attualmente per la stima della variabilità della riserva sinistri non si tiene conto di

questo aspetto applicando metodologie distinte da quelle utilizzate per la stima della riserva sinistri senza tener conto della variabilità associata all'utilizzo di più modelli.

Con la presente tesi si propone un possibile modello di stima della riserva per sinistri ancora da pagare sulla base delle informazioni disponibili per singolo sinistro distinto per i sinistri accaduti (*Incurred but not reported* - IBNR) e non ancora denunciati e per i sinistri denunciati e non ancora pagati (*Reported but not settlement* - RBNS) e per le possibili riaperture di sinistri già chiusi che sarà applicato su dati reali di una compagnia R.C. Auto Italiana di medie dimensioni e confrontato in termini di risultati con le principali metodologie di tipo Macro-Level. Inoltre, sul tema della variabilità verrà proposto un possibile approccio per l'aggregazione della stima della variabilità della riserva sinistri tra vari modelli nell'ottica di un utilizzo operativo.

La tesi è organizzata in due parti principali: la prima parte compresa del presente capitolo 1 dove sono raccolte le motivazioni alla base di questa ricerca e il contesto attuale della letteratura sul tema. Sempre nella prima parte è presentato il modello teorico suddiviso nel processo per il numero dei sinistri, nel capitolo 2, e la distribuzione degli importi dei pagamenti dei sinistri nel capitolo 3. Nella seconda ed ultima parte, nel capitolo 4, sono invece riportati i risultati della calibrazione del modello e le scelte utilizzate per la sua messa in opera con i risultati delle valutazioni, il confronto con la principale modellistica in uso nel settore assicurativo e l'aggregazione della variabilità tra i diversi modelli.

1.1 Background

La principale modellistica Statistico-Attuariale in uso per la stima della riserva sinistri ancora da pagare si basa sul cosiddetto "Triangolo di Run-Off" che riassume i dati dei pagamenti effettuati per combinazione di anno di accadimento e anno di sviluppo inteso come differenza tra l'anno in cui il pagamento è effettuato e l'anno di accadimento del sinistro che ha generato tale pagamento. Trovano largo uso nella pratica attuariale Italiana e internazionale diverse tipologie di approcci deterministici quali il metodo Chain-Ladder (CHL), il metodo Bornhutter-Ferguson (BF), il metodo Fisher Lange (FL) [[Fisher Lange 1974](#)] [[Ottaviani 1983](#)], il metodo di sviluppo della Riserva Case [[Wiser 1990](#)] e il modello Frequency-Severity (FS) [[Savelli 2011](#)] e nella loro totalità sono applicati ai dati triangolari [[Friedland 2010](#)]. Di questi metodi sono stati sviluppati versioni di tipo stocastico, sia con riferimento alla volatilità su orizzonte temporale annuale [[Wuthrich, Merz 2008](#)], sia in un'ottica di completo Run-Off della riserva sinistri [[Mack 1993](#)] [[England Verrall 2002](#)]. Tale impostazioni basata su Triangoli di Run-Off strutturati con un limitato numero di osservazioni, come ribadito da molti autori [[Verdonck 2009](#)] e ultimamente [[Badescu 2016a](#)], potrebbero avere il limite di sovra parametrizzare il processo rispetto alle osservazioni rendendo instabili le stime ed inoltre non consentono a meno di analisi separate di cogliere correttamente il fenomeno delle somme da recuperare da riassicurazione. Inoltre, tali modelli non forniscono una stima distinta tra le due componenti della riserva sinistri IBNR e RBNS che viene richiamata ed auspicata nella praticata anche dai regolamenti attuativi della normativa Solvency II [[Solv 2009](#)]. Infatti l'autorità si attende che per la stima della riserva per sinistri accaduti e denunciati venga fornita una stima *case by case* o in alternativa venga utilizzato un metodo basato sulla stima del numero e del costo medio. Per quanto riguarda invece la componente della riserva per sinistri tardivi (IBNR) viene fatto riferimento alle metodologie attuariali (quali ad es. il CHL) che però non permettono di fornire una netta distinzione tra la componente di riserva legata ai tardivi e quella invece che andrebbe allocata (o detratta se negativa) dalla riserva per sinistri già denunciati.

Come suggerito da molti autori, una possibile strada per riuscire sia a stimare distintamente le due riserve IBNR e RBNS sia per ridurre l'aleatorietà delle stime legata soprattutto all'incertezza sui parametri del modello è l'utilizzo di modelli di tipo Micro-Level basati sulle informazioni dei singoli sinistri registrate dalle compagnie di assicurazione nel corso dell'esercizio della loro attività. Inoltre il vantaggio di operare su singolo sinistro consente l'agevole applicazione di trattati di riassicurazione non proporzionale alla stima della riserva. Alla base della maggior parte dei modelli e dei lavori di riservazione individuale ci sono i lavori di [\[Jewell 1989 1990\]](#) e [\[Norberg 1993 1999\]](#) che proposero il framework matematico generale attraverso l'applicazione del modello Marked Poisson non-omogeneo per la stima del numero dei sinistri tardivi e la stima della riserva sinistri. Tale framework è stato successivamente ripreso e applicato su dati reali da vari autori tra cui [\[Antonio Plat 2014\]](#). Si fa presente che altri autori hanno indagato sull'utilizzo di modelli diversi dal modello di Poisson Non-omogeneo quale ad esempio il modello di Cox per la sola componente del numero dei sinistri IBNR [\[Badescu 2016a 2016b\]](#).

1.2 Il Processo di Riservazione e Liquidazione dei sinistri

Con processo di Riservazione e Liquidazione dei sinistri si intende riferirsi all'insieme degli stati gestionali che un sinistro, accaduto in un determinato anno t , assume nei periodi successivi fino alla sua chiusura definitiva con pagamento o senza pagamento nell'anno T .

In particolare, la nota struttura temporale del singolo sinistro può essere schematizzata in stati gestionali, ad istanti temporali discreti $\Delta t_{i,j} = (t_i, t_j]$ con $j > i$, come la combinazione $(P_{\Delta t_{i,j}}, R_{t_j})$, dove $P_{\Delta t}$ rappresenta la somma dei pagamenti nel periodo dove $\Delta t_{i,j}$ e R_{t_j} la riserva case appostata in t_j dall'ufficio liquidazioni della compagnia di assicurazione. In base a tale impostazione si possono definire 4

stati gestionali del k -esimo sinistro in base alla valorizzazione o meno delle due voci pagato e riservato nel periodo:

Stato Sinistro	$(P_{\Delta t_{i,j}}^k, R_{t_j}^k)$
Non denunciato	(ND, ND)
Aperto (r)	$(0, R_{t_j}^k)$
Pagato Definitivo (pt)	$(P_{\Delta t_{i,j}}^k, 0)$
Pagato Parzialmente (pp)	$(P_{\Delta t_{i,j}}^k, R_{t_j}^k)$
Chiuso (ss)	$(0, 0)$

Tali stati consentono di definire, combinandoli consecutivamente, ulteriori stati del sinistro:

Stato Sinistro	$\Delta t_{i,j}$	$\Delta t_{j,h}$
Riapertura	$(\{P_{\Delta t_{i,j}}^k, 0\}, \{0, 0\})$	$(\{0, P_{\Delta t_{j,h}}^k, P_{\Delta t_{j,h}}^k\}, \{R_{t_h}^k, 0, R_{t_h}^k\})$
Chiuso senza seguito	$(\{0, ND\}, \{R_{t_j}^k, ND\})$	$(0, 0)$

dove $P_{\Delta t_j}^k$ rappresenta la generica somma dei pagamenti effettuati nel periodo Δt_j per il sinistro k -esimo e $R_{t_j}^k$ invece rappresenta la generica somma a Riserva case al tempo t_j e con $h > j > i$. L'evoluzione del k -esimo sinistro nei vari stati sopradescritti avviene ad intervalli temporali non costanti per un numero di passaggi di stato finito ma non definito a priori alla denuncia del sinistro. Come riportato nello schema esemplificativo riportato nella Figura 1:

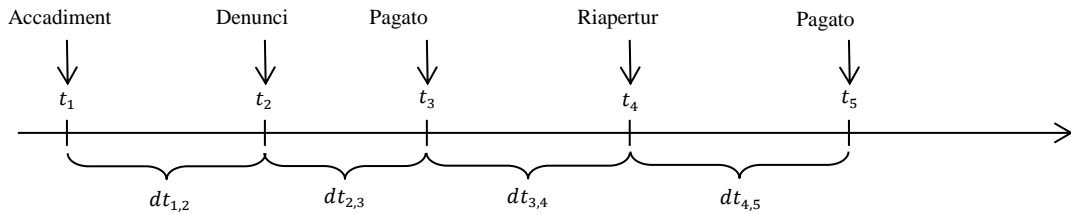


Figura 1: Schema temporale di un generico sinistro riaperto dopo un pagamento definitivo

tale struttura temporale può essere riportata nel discreto così come riportato nella Figura 2:

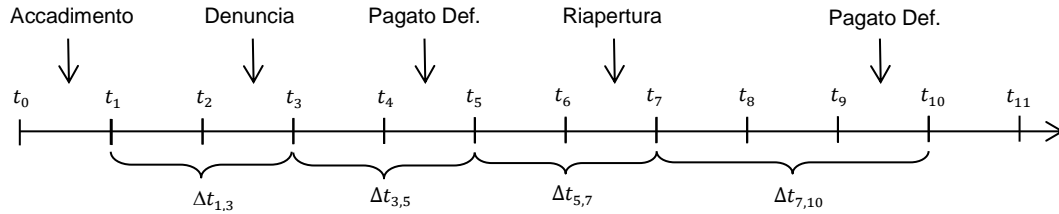


Figura 2: Schema temporale discreto di un generico sinistro riaperto dopo un pagamento definitivo

Questa aggregazione degli intervalli di tempo risulta allineata con la classificazione contabile dei tempi gestionali dei sinistri che solitamente avviene ad intervalli trimestrali, semestrali o annuali. Alla base della suddivisione vi è la ipotesi di uniformità degli eventi relativi ai sinistri nel periodo $\Delta t_{i,j}$.

Riserva sinistri dei Liquidatori e riserva bilanciaire

In riferimento alla riserva case R_{t_j} si precisa che solitamente nelle compagnie è in uso determinare tale ammontare sulla base di valutazioni con metodi al costo medio (generalmente nel periodo appena successivo alla denuncia del sinistro dove le informazioni sulla pratica del sinistro sono ancora limitate) e con stime puntuali (*case*) basate sulle richieste di risarcimento della controparte, sulla natura del sinistro (danni a cose o a persone), sul numero delle varie voci di danno del sinistro¹ e sulle natura delle eventuali spese direttamente imputabili al sinistro (Allocated Loss Adjustment Expense – ALAE).

Finora si è fatto riferimento alle sole somme a riserva e alle somme pagate al lordo di eventuali trattati di riassicurazione e di somme da recuperare dalla controparte per surrogazione o per la presenza di franchigie o massimali. Utilizzando la

¹ Nel Ramo R.C. Auto Italiano la [\[CARD 2006\]](#) (Convenzione tra Assicuratori per il Risarcimento Diretto) definisce la voce di danno: “danni a persona (Biologico, patrimoniale, non patrimoniale, spese mediche, rivalsa di assicuratori sociali, datori di lavoro) per danni a cose (Riparazione o sostituzione delle cose trasportate) per danni al veicolo (Riparazione del veicolo, stima per differenza, fermo tecnico, svalutazione, trasporto, ecc.)”

classificazione dei flussi di cassa è possibile identificare le voci componenti la riserva sinistri:

- **Cash Flow Out:**
 - Indennizzi da pagare relativi ai sinistri;
 - Spese di liquidazione dirette e di resistenza (ALAE);
 - Spese di liquidazione indirette (ULAE);
 - Spese operative legate alla gestione della riserva sinistri diverse da quelle di liquidazione;
 - Franchigie e recuperi da cedere al trattato di riassicurazione.
- **Cash Flow In:**
 - Franchigie e recuperi;
 - Somme da recuperare da trattati di riassicurazione.

L'analisi della riserva da parte dell'ufficio di liquidazione è solitamente effettuata nel continuo per singolo sinistro e, nel contesto dei principi contabili Italiani, è effettuata a costo ultimo senza tener conto di nessun tipo di attualizzazione [\[Reg. 22\]](#). Secondo la normativa Solvency II [\[Solv 2009\]](#) recepita nel Codice delle Assicurazioni Italiane le riserve sinistri vanno determinate ai fini di solvibilità secondo il principio Market Consistent ovvero come la somma della Best Estimate (BE) più un Risk Margin. Per quanto riguarda la determinazione delle BE, anche per i segmenti Non-Life e in particolare per le riserve sinistri, la normativa richiede che siano attualizzate utilizzando un'opportuna curva risk-free identificata mese per mese dall'autorità (BCE) sulla base dei tassi Euroswap. In tale contesto la sola definizione dell'ammontare della riserva case della compagnia non consente di tener conto del timing di uscita degli importi a riserva e di poter effettuare una puntuale attualizzazione. Ad ogni modo si sottolinea che con l'attuale contesto di curve di tassi basse l'impatto di una non corretta attualizzazione è evidentemente trascurabile.

Infine si riporta per completezza lo schema di classificazione delle riserve sinistri secondo la prassi assicurativa e accademica attuariale:

- Riserva per sinistri accaduti e denunciati (Case - RBNS);
- Riserva per sinistri accaduti ma non ancora denunciati (IBNyR);
- Utile o perdita da Run-Off Riserva Case (BULK - IBNeR);
- Riserva per sinistri latenti ed infrequenti (Event Not In Data - EIND).

Per quanto riguarda l'ultima voce di riserva si fa presente che la normativa italiana richiede che la riserva sinistri sia valutata secondo il principio di prudenza sulla base di ragionevoli previsioni, invece la normativa Solvency II richiede che la valutazione delle BE sia effettuata come il valore atteso di tutti i possibili flussi di cassa pesati con le probabilità associate. Tali definizioni si distinguono per il principio della prudenza presente nella normativa italiana e per la definizione di quei possibili eventi che non essendo mai stati osservati nei dati della Società sono in ogni caso potenzialmente osservabili. Si fa presente che ai fini dell'elaborato si farà riferimento ai soli sinistri ed eventi osservabili nei dati escludendo ogni considerazione modellistica per gli eventi EIND.

1.3 Solvency II, l'ORSA e il Reserve Risk

La normativa Europea Solvency II ha introdotto a partire dall'esercizio 2017 nel mercato assicurativo europeo un criterio di misurazione dell'assorbimento di capitale sull'orizzonte temporale di un anno di tipo risk-base attraverso in primis l'utilizzo della *Standard Formula (SF)* [[Solv 2009](#)] oppure attraverso modelli interni completi o parziali o anche attraverso l'utilizzo dei parametri specifici d'impresa (*USP*) calibrati sui dati interni della compagnia. La *SF* è caratterizzata da una struttura modulare di tipo gerarchico dove i vari livelli vengono aggregati attraverso l'utilizzo di matrici di correlazione tra i vari moduli che rappresentano i rischi alla quale la compagnia è esposta. Per quanto riguarda il Reserve Risk all'interno dei moduli Non-Life e Health NSLT la SF prevede una formulazione del requisito di capitale di tipo *factor base* a partire dal volume delle riserve sinistri al netto della riassicurazione al quale viene moltiplicato un parametro Market-Wide distinto per segmento di copertura che rappresenta il Coefficiente di Variazione - CoV della distribuzione della riserva sinistri su un orizzonte temporale di un anno. L'introduzione della normativa Solvency II ha introdotto oltre al calcolo del requisito di capitale importanti novità per quanti riguardo la *Governance* dell'impresa di assicurazione soprattutto in riferimento alle attività di Risk Management relative alla valutazione del reale profilo di rischio dell'azienda (Own Risk Solvency Assessment - ORSA) non solo su un orizzonte temporale di un anno, come misurato nella SF, ma con un approccio di tipo *forward looking*.

In quest'ottica l'utilizzo di modellistica di tipo Macro-level basata sulla sola volatilità dei pagamenti del Triangolo di Run-Off potrebbe non essere adeguatamente sufficiente a misurare la volatilità intrinseca nel processo. In ogni caso tra i metodi standardizzati utilizzati dall'EIOPA per la calibrazione del parametro di volatilità del Reserve Risk vi è il modello di [[Wuthrich, Merz 2008](#)], che attualmente fornisce una stima del CoV su un orizzonte temporale di un anno e che ha il vantaggio di essere

basata sui dati di input dei principali metodi di valutazione adottati nella pratica attuariale.

1.4 Principali modelli Macro-Level

Nel presente paragrafo è riportata una breve descrizione dei principali modelli su dati aggregati utilizzati nella prativa nazionale ed internazionale per il calcolo della riserva sinistri. Il principale algoritmo di riferimento del settore è il metodo Chain Ladder che viene riportato dall'EIOPA [\[EIOPA 2014\]](#) tra i metodi attuariali utilizzabili per la stima della Best Estimate della riserva per sinistri tardivi (IBNR). Tale metodo è può essere applicato sia ai dati del triangolo di Run-Off dei pagamenti cumulati dei sinistri (Paid) che a quello dell'Incurred (pagato cumulato più la riserva case). Seguendo la notazione fornita da [\[Mack 1993\]](#) è possibile scrivere la stima della riserva sinistri con il metodo Chain Ladder Paid come:

$$\hat{R}_i = C_{i,I+1-i} \left(\prod_{k=I+i-1}^{I-1} \hat{f}_k - 1 \right) \quad (1)$$

con

$$\hat{f}_k = \frac{\sum_{j=1}^{I-k} C_{j,k+1}}{\sum_{j=1}^{I-k} C_{j,k}} \quad (2)$$

Dove \hat{f}_k sono i fattori di sviluppo calcolati per ciascun anno di sviluppo e rappresentano l'incremento moltiplicativo del pagato cumulato registrato tra un'antidurata e l'altra. Sostituendo alla 1 e alla 2 l'importo incurred si ottiene il modello Chain Ladder Incurred.

La filosofia dei due metodi è profondamente diversa seppur seguono la stessa meccanica di sviluppo. Il metodo Paid proietta i pagamenti futuri sulla base dell'evoluzione dei pagamenti osservati nelle generazioni precedenti. Nel caso

dell'incurred il metodo proietta il Run-Off della riserva case o in altri termini proietta l'evoluzione del costo dei sinistri di generazione sulla base di quanto osservato nelle generazioni precedenti. Utilizzando la formula chiusa di Mack è possibile ricavare la stima del *Prediction Error* di entrambi i modelli sia basati sul pagato che sull'incurred.

L'applicazione del metodo Chain Ladder può essere estesa anche al triangolo della riserva case come nel caso del metodo Reserve Development Methods [\[Wiser 1990\]](#) che associa all'evoluzione della riserva case fino al suo completo esaurimento al rapporto pagato su riservato iniziale:

$$\hat{R}_i = R_i^{case} \sum_{h=l+i-1}^{l-1} \left[\hat{\alpha}_h \prod_{k=h-1}^{l-1} \hat{r}_k \right] \quad (3)$$

con

$$\hat{r}_k = \frac{\sum_{j=1}^{l-k} R_{j,k+1}^{case}}{\sum_{j=1}^{l-k} R_{j,k}^{case}}, \quad \hat{\alpha}_h = \frac{\sum_{j=1}^{l-h} P_{j,h+1}}{\sum_{j=1}^{l-h} R_{j,h}^{case}} \quad (4)$$

Tale approccio è stato ripreso da [\[Dahms 2008\]](#) e parametrizzato utilizzando la seguente uguaglianza:

$$r = (1 - \alpha + \beta), \quad \text{con } \beta = \frac{\sum_{j=1}^{l-h} P_{j,h+1} + \sum_{j=1}^{l-k} R_{j,h+1}^{case} - \sum_{j=1}^{l-h} R_{j,h}^{case}}{\sum_{j=1}^{l-h} R_{j,h}^{case}} \quad (5)$$

L'autore stesso definisce una formula chiusa per il *Prediction Error* su ispirazione della formula di [\[Mack 1993\]](#).

Modelli Stocastici

Nel corso dell'elaborato ai fini di comparare i risultati del modello individuale proposto saranno utilizzati i principali metodi stocastici noti in letteratura e operativamente utilizzati. Saranno considerati sia modelli *distribution-free*, come il

Mack Chain Ladder [[Mack 1993](#)] (applicato al triangolo dei pagamenti e al triangolo dell'Incurred) e il modello di Dahms [[Dahms 2008](#)], sia con il modello con ipotesi distributiva quale il Chain Ladder Overdispersed Poisson [[England Verrall 2002](#)].

1.5 Aggregazione variabilità tra modelli

Nella prassi attuariale è diffuso l'utilizzo di una pluralità di modelli per la stima della riserva sinistri per tener conto delle diverse peculiarità informative dei dati di input e delle diverse ipotesi alla base dei modelli. La soluzione più immediata per tener conto delle risultanze dei vari modelli attuariali è quella di mediare le diverse stime pesando opportunamente i valori. Viste le novità normative in materia di solvibilità [[Solv 2009](#)] con particolare riferimento alla quantificazione del Reserve Risk, tale prassi potrebbe essere estesa non solo alla stima del valore atteso della riserva sinistri ma anche alla stima della sua variabilità in ottica di Risk Management.

La pluralità di metodologie per la stima della variabilità della riserva sinistri possono essere aggregate in coerenza con quanto effettuato con i relativi valori attesi.

Sia M un insieme di modelli M_1, \dots, M_n per la stima del valore atteso e della varianza della riserva sinistri R . Definiamo la stima del valore atteso della variabile aleatoria R , importo della riserva sinistri, come media ponderata delle medie condizionate a tutti i modelli dell'insieme M :

$$\widehat{E}[R] = \sum_i^n \omega_i E[R|M_i] \quad (6)$$

dove ω_i è il peso associato al modello con $\sum_i^n \omega_i = 1$.

Definiamo la stima della varianza di R come media ponderata delle varianze condizionate a tutti i modelli dell'insieme M più la varianza ponderata delle medie condizionate associate:

$$\begin{aligned}\widehat{VAR}[R] &= E[VAR[R|M]] + VAR[E[R|M]] = \\ &= \sum_i^n \omega_i VAR[R|M_i] + \sum_i^n \omega_i (E[R|M_i] - \widehat{E}[R])^2\end{aligned}\tag{7}$$

La formula 7 consente non solo di tener conto della variabilità del processo e della stima dei singoli modelli ma coglie anche la distorsione (bias) relativa al stima del valore atteso del modello M_i rispetto al reale valore della riserva sinistri.

Per quanto riguarda la scelta dei pesi dovrebbero essere considerati i seguenti fattori: la bontà d'adattamento dei dati di input alle ipotesi dello specifico modello, l'osservazione storica dei risultati dei modelli confrontati con la reale evoluzione, ad esempio in termini di ultimate, della riserva sinistri (actual vs expected), la possibile intersezione tra uno o più modelli in termini di dati di input e/o funzioni.

2. Processo dei Numeri

Nel presente capitolo verranno illustrati il modello statistico utilizzato e le assunzioni predisposte per la stima del numero di sinistri tardivi e per la stima dei tempi di arrivo dei singoli stati nella vita del sinistro. In particolare, verrà utilizzato una versione a tempo discreto del processo Marked Poisson non-omogeneo dove la distribuzione del tempo di arrivo della denuncia è ricavata invece che da una distribuzione parametrica continua dal metodo Chain Ladder applicato al triangolo dei sinistri denunciati.

2.1 Notazione

Per semplificare la descrizione del modello statistico della vita di un sinistro, vista la complessità e pluralità del processo, sono riportati di seguito un riepilogo delle notazioni utilizzate. In riferimento agli stati possibili si fa riferimento a quanto riportato nel [Paragrafo 1.2](#):

Notazione	Definizione	Descrizione
$A_{k,i}$	$A_k = t_i^k$	Periodo (i) di Accadimento del sinistro k -esimo
$R_{k,j}$	$R_k = t_j^k$	Periodo (j) di Denuncia del sinistro k -esimo
$E_{k,l}^h$	$E_k^h = t_l^{k,h}$	Periodo (l) del h -esimo stato del sinistro k -esimo
T		Periodo di valutazione del sinistro k -esimo
$\tau E_{k,l}^h$		Tipologia del h -esimo stato nel periodo (l) del sinistro k -esimo
$\Delta U_{k,l}$	$R_k - A_k$	Numero di periodi tra l'accadimento e la denuncia del sinistro k -esimo
$\Delta V_{k,l}^1$	$E_k^1 - R_k$	Numero di periodi tra la denuncia e il primo stato del sinistro k -esimo
$\Delta V_{k,l}^{h+1,h}$	$E_k^{h+1} - E_k^h$	Numero di periodi tra lo stato h -esimo e il successivo del sinistro k -esimo
M_k		Numero di passaggi di stato del sinistro k -esimo
$EP_{k,l}^h$		Pagamento nel periodo E_k^h relativo alla tipologia di stato τE_k^h
$ERI_{k,l}^h$		Riserva Case nel periodo precedente al pagamento EP_k^h
$E\alpha_{k,l}^h$	$EP_{k,l}^h / ERI_{k,l}^h$	Rapporto Pagato sui Riservato Iniziale del periodo EP_k^h

Tabella 1: notazione riferita al k -esimo sinistro

In base alla notazione riportata nella Tabella 1 è possibile descrivere esaurientemente il processo di liquidazione e riservazione di un sinistro:

$$\{A_k, \Delta U_k, (\Delta V_k^1, \Delta V_k^{h+1,h}, \tau E_k^h, EP_k^h) : h = 1, \dots, NE_k\}$$

A differenza dell'impostazione adottata da [\[Antonio Plat 2014\]](#) e [\[Jin 2013\]](#) per il processo di sola liquidazione dei sinistri si è tenuto conto anche di eventi che pur non generando pagamenti nella vita di un sinistro contribuiscono alla descrizione più dettagliata possibile della sua evoluzione con particolare riferimento anche alle riaperture da senza seguito e da pagamenti definitivi.

Quindi rispetto alla data di valutazione T un sinistro può essere classificato nei seguenti gruppi:

- Sinistro Tardivo (IBNR): $A_k + \Delta RA_k > T$ con $A_k \leq T$
- Sinistro Denunciato (RBNS): $A_k + \Delta RA_k \leq T$ che può essere sotto classificato in un numero di sottogruppi pari al numero di passaggi di stato

ME_k :

- $A_k + \Delta RA_k + \Delta ER_k > T$ in attesa del primo passaggio di stato
- $A_k + \Delta RA_k + \Delta ER_k + \sum_h^{ME_k} \Delta EE_k^{h+1,h} > T$ in attesa del h-stato

Si osservi come tale classificazione successiva alla denuncia non esclude la potenziale riapertura di un sinistro anche dopo diversi anni di chiusura del pagamento definitivo o di classificazione come senza seguito. Le compagnie di assicurazione dovendo valutare la riserva sinistri con i dati più aggiornati possibili sono costrette a operare le stime su dei sinistri che hanno un contenuto informativo ancora non definito. Svolgere valutazioni con modelli basati su database consolidati in termini di contenuto informativo, dove si conosce con un maggior grado di affidabilità la classificazione di chiusura definitiva, non possono essere ritenuti applicabili dal punto di vista operativo.

2.2 Marked Poisson non-omogeneo a tempo discreto

A partire dal *framework* statistico formulato da [\[Jewell 1989 1990\]](#) e [\[Norberg 1993a 1999\]](#) si consideri il processo del numero dei sinistri $N(t)$ come un processo *Marked Poisson* non-omogeneo con funzione di intensità $\lambda(t) = v(t)f(t)$, dove f rappresenta la frequenza sinistri e v l'esposizione nota al tempo T . Sia \mathbf{Z} il *Mark* associato al processo di Poisson con $\mathbf{Z}_k = (U_k, \mathbf{X}_k)$ e dove \mathbf{X}_k rappresenta lo sviluppo del sinistro successivo alla denuncia. Se si ipotizza indipendenza tra il processo e il *Mark* \mathbf{Z} la misura di intensità del processo è $\lambda(t)$ con $U(t)$ la tardività della denuncia di tipo *time-dependent* e con distribuzione $U(t) \sim F_{U|t}$. Sulla base di queste assunzioni si può scrivere la misura di intensità del processo come:

$$\lambda(dt) \times P_{U|A}(du) \times P_{\mathbf{X}|(U,A)}(dx) \quad (8)$$

che nel caso dei sinistri tardivi (IBNR) può essere riscritta come:

$$\lambda(dt) \times \left(1 - P_{U|A}(T-t)\right) 1(t \in [0, T]) \times \frac{P_{U|A}(du) 1(u > T-t)}{1 - P_{u|A}(T-t)} P_{\mathbf{X}|(U,A)}(dx) \quad (9)$$

e per quanto riguarda i sinistri già denunciati al tempo T :

$$\lambda(dt) \times P_{U|A}(T-t) 1(t \in [0, T]) \times \frac{P_{U|A}(du) 1(u \leq T-t)}{1 - P_{u|A}(T-t)} P_{\mathbf{X}|(U,A)}(dx) \quad (10)$$

In base alla precedente formulazione si ottiene l'espressione della funzione di verosimiglianza associata ai sinistri già denunciati al tempo T :

$$\mathcal{L}_{N,(A,U)} = \left(\prod_k \lambda(t_k) f_{U|A}(T-t_k) \right) \exp \left(- \int_0^T \lambda(t_k) F_{U|A}(T-t_k) dt \right) f_{\mathbf{X}|(A,U)}(x_k) \quad (11)$$

Se si considera l'intensità del processo discreta, cioè costante all'interno del periodo Δt_i prescelto è possibile ricavare analiticamente la stima del parametro della Poisson come:

$$\hat{\lambda}_{\Delta t_i} = \frac{N_{\Delta t_i}}{\int_{t_{i-1}}^{t_i} F_{U|t}(T-t) dt} \quad (12)$$

dove $N_{\Delta t_i}$ rappresenta il numero dei sinistri già denunciati al tempo T relativi al periodo Δt_i . Come si può osservare l'equazione 12 mette in relazione il numero di sinistri denunciati al tempo T di con la distribuzione del tempo tra la denuncia e l'accadimento del sinistro. Tale stima può essere riformulata ipotizzando una distribuzione del tempo di ritardo della denuncia costante a tratti nel periodo Δt_i con la seguente formulazione:

$$\hat{\lambda}_{\Delta t_i} = \frac{N_{\Delta t_i}}{(\prod_i^M f_i)^{-1}} \quad (13)$$

Dove f rappresenta il fattore di sviluppo del metodo Chain Ladder (vedi [Paragrafo 1.4](#)) applicato al triangolo del numero delle denunce cumulate al tempo T con una struttura periodale Δt e con M il numero massimo di anni di osservazione delle denunce². Il vantaggio operativo nell'utilizzo del metodo Chain Ladder per la stima della distribuzione del tempo di arrivo della denuncia è legato alla maggiore stabilità dell'evoluzione nel triangolo di run-off del numero dei sinistri rispetto agli importi. Tendo conto della 13 è possibile definire la distribuzione del numero dei sinistri tardivi:

² Nella maggior parte dei casi pratici ed in particolare per il ramo R.C. Auto Italiano il numero delle denunce pervenute dopo 10 anni dalla data di accadimento è sostanzialmente nullo.

$$N_{\Delta t_i}^{IBNR} \sim \text{Poisson} \left(\lambda_{\Delta t_i} \left(1 - \left(\prod_i^M f_i \right)^{-1} \right) \right) \quad (14)$$

Per quanto riguarda al componente $P_{X|(U,A)}(dx)$ che descrive lo sviluppo successivo alla denuncia del sinistro, sempre in ipotesi di tempi discreti e utilizzando la classificazione degli stati con la combinazione (P, R) , definiamo il seguente schema di passaggi di stato:

Stato	Tipologia Stato	Tempo di arrivo	
E^1	$\tau E_{pt,pp,ss}^1 = \{(P, 0), (P, R), (0,0)\}$	$\Delta V_{pt,pp,ss}^1 = \{(P, 0), (P, R), (0,0)\}$	(15)
E^h	$\tau E_{pt,pp,ss,r}^h = \{(P, 0), (P, R), (0,0), (0, R)\}$	$\Delta V_{pt,pp,ss,r}^h = \{(P, 0), (P, R), (0,0), (0, R)\}$	

Ogni passaggio di stato deve necessariamente seguire le seguenti combinazioni:

Stato Iniziale		Stato successivo	
$\tau E_r^h = (0, R)$	\Rightarrow	$\tau E_{pt,pp,ss}^{h+1} = \{(P, 0), (P, R), (0,0)\}$	
$\tau E_{pt}^h = (P, 0)$	\Rightarrow	$\tau E_{pt,pp,r}^{h+1} = \{(P, 0), (P, R), (0, R)\}$	(16)
$\tau E_{pp}^h = (P, R)$	\Rightarrow	$\tau E_{pt,pp,ss}^{h+1} = \{(P, 0), (P, R), (0, 0)\}$	
$\tau E_{ss}^h = (0, 0)$	\Rightarrow	$\tau E_{pt,pp,r}^{h+1} = \{(P, 0), (P, R), (0, R)\}$	

Ad ogni passaggio di stato è assegnata una specifica probabilità pE^{h,τ_i} di passaggio e una distribuzione del tempo $\Delta V_{\tau_i}^{h+1,h}$ tra uno stato e il successivo. Per la stima delle probabilità di passaggio e del tempo tra uno stato e l'altro si ricorre alla seguente formulazione distinta tra evento da sinistro riserva e la riapertura:

Stato da sinistro a riserva		Riapertura	
$\widehat{pE_{\Delta t_i}^{h,\tau}} = \frac{NE_{\tau_i}^h \prod_i^{M_{\tau_i}^h} f_{i,\tau_i}^h}{\sum_i NE_{\tau_i}^h \prod_i^{M_{\tau_i}^h} f_{i,\tau_i}^h}$		$\widehat{pE_{\Delta t_i}^{h,\tau}} = \frac{NE_{\tau_i}^h \prod_i^{M_{\tau_i}^h} f_{i,\tau_i}^h}{\sum_i NE_{\tau_i}^h + NNE^{h-1}}$	(17)

dove $NE_{\tau_i}^h$ rappresenta il numero di sinistri che hanno registrato lo stato h -esimo della tipologia τ_i con $i = \{pt, pp, ss, r\}$ e f_{i,τ_i}^h rappresenta il fattore di sviluppo del metodo Chain Ladder applicato al triangolo dei sinistri che hanno generato lo stato h -esimo e che permette di stimare anche la distribuzione del tempo tra un stato e il successivo, infine nel caso delle probabilità di riapertura, NNE^{h-1} è il numero di sinistri che hanno registrato lo stato precedente e non sono passati nel h -esimo stato.

Per il generico stato E^h la distribuzione del tempo di arrivo è quindi, come nel caso del *lag* temporale tra il tempo di accadimento e di denuncia, approssimata a tempo discreto con il vettore dei fattori di sviluppo del metodo Chain Ladder applicato al triangolo del numero dei sinistri costruito per periodo di generazione dello stato E^{h-1} ed i periodi di sviluppo $\Delta V^{h,h-1}$. Tale impostazione prevede l'indipendenza tra i lag temporali tra gli eventi $\{\Delta V^1, \Delta V^{2,1}, \dots, \Delta V^{h,h-1}, \dots, \Delta V^{ME,ME-1}\}$. Tale assunzione come si vedrà più avanti richiederà alcune ulteriori considerazioni con particolare riferimento alla dipendenza del ΔU (il tempo tra l'accadimento e la denuncia del sinistro) e gli importi dei pagamenti. Vista la complessità dei passaggi di stato ipotizzati si riporta di seguito uno schema illustrativo del processo di passaggio:

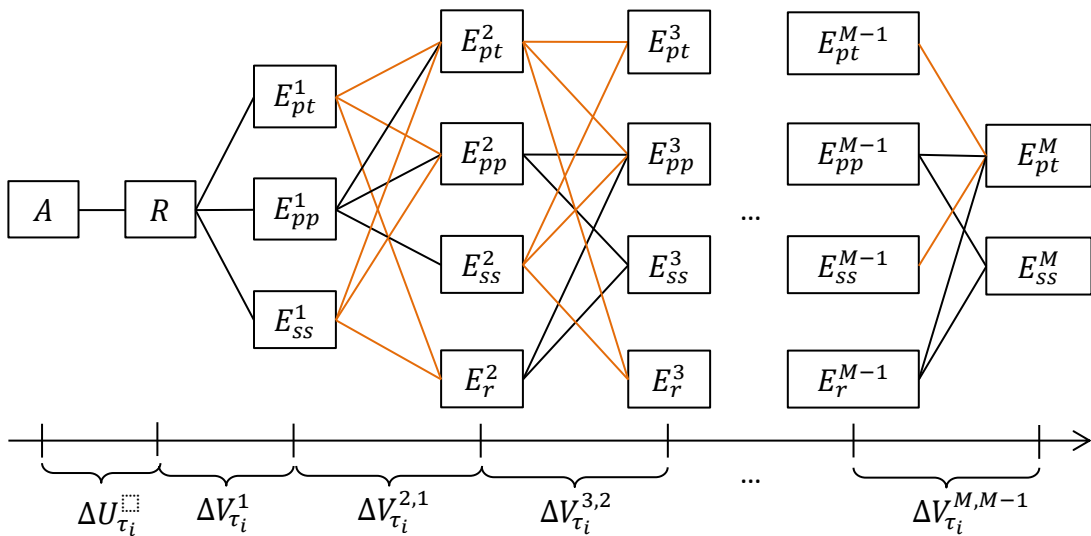


Figura 3: Schema evolutivo dei passaggi di stato di un sinistro

Ad ogni passaggio di stato è associata una probabilità $pE_{\Delta t_i}^{h,\tau}$ e un tempo $\Delta V_{\tau_i}^{h+1,h}$ che nel caso di una riapertura è indicato con la linea arancione invece per i passaggi dove è presente una riserva case per singolo sinistro allo stato iniziale è illustrata in nero.

Rischio di parametro

Al fine di stimare il *Prediction Error* associato alla stima della riserva sinistri a Run-Off, oltre al rischio di processo modellizzato nella prima parte del presente paragrafo, è necessario tener conto anche del rischio legato alla scelta dei parametri del modello. Visto l'utilizzo di triangolari del numero di sinistri sia per stimare il numero di sinistri IBNR e le probabilità e i tempi di passaggio associate ai vari stati del modello è possibile utilizzare la tecnica Bootstrapping applicata ai triangoli di Run-Off così come descritta da [\[England Verrall 2002\]](#) nella sezione 8. In particolare, facendo riferimento per comodità al parametro dell'intensità della Poisson $\lambda_{\Delta t}$ (stesse considerazione valgono per la stima delle probabilità e dei tempi associati ai passaggi di stato) sono stati rimescolati i residui di Pearson del triangolo di Run-Off dei numeri e ristimando i fattori di sviluppo del Chain Ladder dallo pseudo-triangolo generato. Tale tecnica permette di ottenere una distribuzione legata al vettore dei fattori di sviluppo f e di conseguenza tramite la relazione 6 di fornire una distribuzione anche al parametro della Poisson.

2.3 Modello di proiezione degli stati

Nel presente paragrafo sono riportati nel dettaglio gli *step* del modello evolutivo che sono stati implementati tenendo anche conto dell'incertezza di parametro. La routine per i sinistri tardivi (IBNR) e sinistri denunciati (RBNS e riaperture) differisce per il solo STEP1.

STEP 1a – Generazione dello pseudo-triangolo di Run-Off del numero dei sinistri denunciati e determinazione del parametro $\hat{\lambda}_{\Delta t_i}$ e

della distribuzione discreta del tempo di arrivo della denuncia relativa al periodo di accadimento Δt_i .

STEP 1b – Simulazione del numero dei sinistri tardivi IBNR, relativi al periodo di accadimento Δt_i , dalla distribuzione di Poisson con intensità pari a quella generata nello STEP 1a.

STEP 1c – Simulazione del numero di periodi ΔU tra l'accadimento e la denuncia dalla distribuzione discreta del tempo di arrivo della denuncia.

STEP 2a – Generazione dagli pseudo-triangoli di Run-Off del numero dei sinistri che hanno registrato lo stato $E_{pt,pp,ss}^1$ e della probabilità di passaggio di stato con associate le distribuzioni discrete del tempo di arrivo dello specifico passaggio di stato τ_i nel periodo di denuncia Δt_j .

STEP 2b – Simulazione del passaggio di stato successivo alla denuncia per i sinistri che ancora non hanno registrato tale passaggio, relativi al periodo di denuncia Δt_j , dalle probabilità di passaggio di stato generate nello STEP 2a.

STEP 2c – Simulazione del numero di periodi ΔV^1 tra la denuncia e il primo passaggio di stato, simulato nello STEP 2b, dalla distribuzione discreta del tempo di arrivo del primo stato.

STEP 3a – Generazione dagli pseudo-triangoli di Run-Off del numero dei sinistri che hanno registrato un stato $E_{\tau_i}^h$ della probabilità di passaggio di stato e le distribuzioni discrete del tempo di arrivo dello specifico stato τ_i nel periodo di osservazione di E^{h-1} .

STEP 3b – Simulazione del passaggio dallo stato E^{h-1} per i sinistri che ancora non hanno registrato tale stato, relativi al periodo di osservazione dello stato E^{h-1} , dalle probabilità di passaggio di stato generate nello STEP 3a.

STEP 3c – Simulazione del numero di periodi $\Delta V^{h,h-1}$ tra lo stato iniziale e il successivo, simulato nello STEP 3b, dalla distribuzione discreta del tempo di arrivo del passaggio a $E_{\tau_i}^h$.

STEP 4 - Ripetizione degli STEP 3 fino all'ultimo evento E_{τ}^M

La precedente routine sarà completata con l'algoritmo dei pagamenti degli importi dei sinistri, negli stati specifici, che sarà trattata nel prossimo capitolo.

3. Distribuzione degli Importi

A completamento del modello di proiezione, nel capitolo sarà presentato il modello statistico utilizzato e le assunzioni predisposte per la stima dell'importo dei sinistri, sia nel caso di sinistri IBNR che per i sinistri RBNS e riaperture. Per quanto riguarda la stima dell'importo dei sinistri a riserva al tempo di valutazione è proposto un approccio dove la stima del pagato è funzione della riserva case iniziale e della variabile pagato su riservato iniziale. Lo spirito di questa scelta è legato all'elevato contenuto informativo della riserva case che consente di ridurre notevolmente l'errore nella stima dell'importo dei pagamenti.

3.1 Distribuzione dei pagamenti e Run-Off Riserva Case

Il punto debole nella formulazione dei modelli di tipo Micro-Level rispetto ai Macro-Level è la scelta della distribuzione associata agli importi dei pagamenti che si osservano nel corso della vita di un sinistro. Come suggerito da [\[Friedland 2010\]](#) ai fini della stima della riserva sinistri il modello dovrebbe tenere conto dell'informazione contenuta nella case reserve in quanto il solo processo dei pagamenti, aggregato o singolo, potrebbe non cogliere completamente l'evoluzione a costo ultimo dei sinistri. Vista la cruciale importanza dell'informazione contenuta

nella riserva case si è scelto di modellizzare il costo dei pagamenti in funzione dello stato gestionale del sinistro e studiando la sua evoluzione in termini di rapporto pagato su riservato case nello stato precedente. Tale scelta ha condotto a suddividere i sinistri in base a loro stato gestionale. Per quanto riguarda i sinistri a riserva $(0, R)$ o pagati parzialmente (P, R) la stima del pagato è stata effettuata sulla base del Run-Off della singola *case reserve* del sinistro tra lo stato iniziale ed il successivo. Invece per quanto riguarda i sinistri tardivi stimati (IBNR), i sinistri chiusi con pagamento definitivo $(P, 0)$ o senza seguito $(0, 0)$, non essendo disponibile la case reserve si è fatto riferimento alla distribuzione dei pagamenti per riaperture. Si fa presente che il modello come sarà descritto fa riferimento alla riserva al lordo dei recuperi per surrogazione, franchigie o massimali.

Sia ERI_k^h la riserva case relativa al k -esimo sinistro nel periodo precedente allo stato E_k^h , con tipologia di stato $\tau E_k^h = \{(P, 0), (P, R)\}$ si definisce:

$$E\alpha_{k,t}^h = \frac{EP_{k,t}^h}{ERI_{k,t-1}^h} \quad (18)$$

dove $E\alpha_k^h$ è lo scostamento in termini percentuali tra la Riserva case appostata per il sinistro k -esimo da liquidatore rispetto al pagamento che viene effettuato nel corso del periodo. Se si ipotizza che $E\alpha_{k,t}^h$ segua una distribuzione Log-Normale è possibile riscrivere la seguente relazione:

$$\gamma_t = \log(E\alpha_{k,t}^h) = \log\left(\frac{EP_{k,t}^h}{ERI_{k,t-1}^h}\right) \quad (19)$$

con $\gamma_t \sim \text{Normale}$ che rappresenta come in un contesto finanziario, il rendimento logaritmo di un'operazione economica di finanziamento dove a fronte di un investimento in $t - 1$ pari a $ERI_{k,t-1}^h$ si restituisce in t l'importo aleatorio $EP_{k,t}^h$.

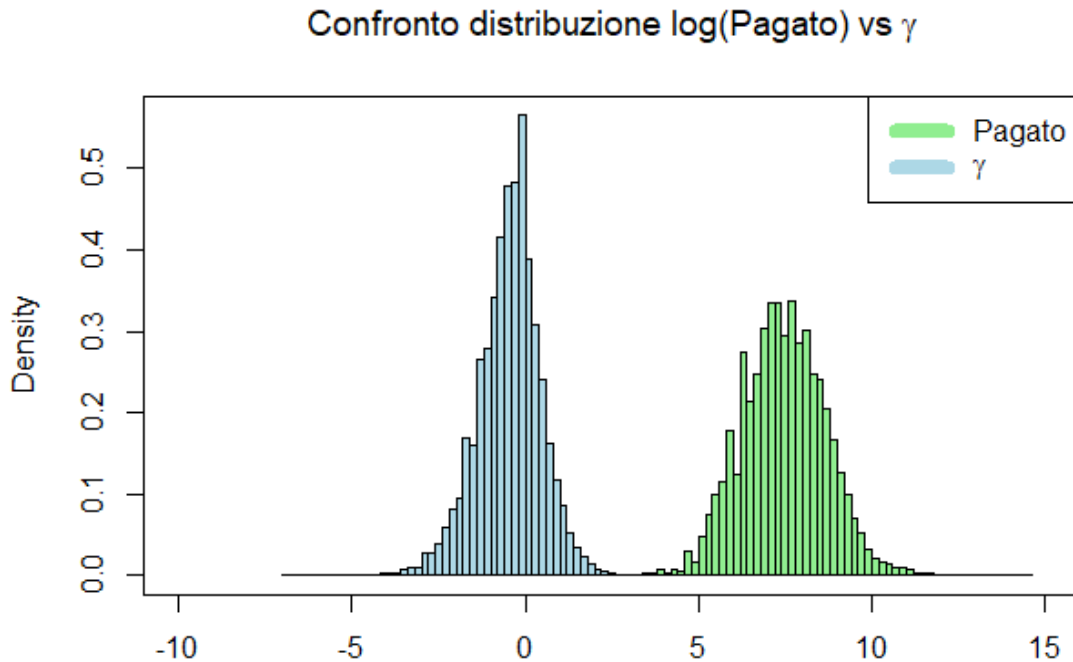


Grafico 1: Confronto distribuzioni $\log(\text{Pagato})$ e di γ

Nel Grafico 1 sono riportate le due distribuzioni empiriche di γ e il logaritmo del pagato per i sinistri che hanno generato un pagamento nello stato successivo alla denuncia. Si può osservare come trasferire l'analisi dei pagamenti alla distribuzione del rapporto pagato su riservato consente di trarre beneficio dalla ridotta variabilità della distribuzione rispetto a quella del pagato.

Per quanto riguarda invece i pagamenti per i sinistri tardivi e per le riaperture o i successivi stati simulati nella routine, cioè i sinistri che alla data di valutazione si trovano in uno stato di chiusura e non hanno appostata una riserva case, viene utilizzata la stima della distribuzione dei pagamenti osservati per tipologia di stato e tenendo conto di due covariate temporali: il numero di periodi tra uno stato che genera il pagamento e gli stati precedenti e, nel caso dei soli sinistri IBNR, del numero di periodi tra l'accadimento e la denuncia. L'ipotesi distributiva utilizzata per questa tipologia di pagamenti è la Log-Normale con le covariate utilizzate sia per la stima di μ che di σ .

Rischio di parametro

Come per la stima dei parametri del processo dei numeri anche per gli importi si è tenuto conto dell'incertezza legata alla stima del parametro. Sia nel caso del *fitting* delle distribuzioni del Pagato su Riservato Iniziale sia per la calibrazione delle distribuzioni degli importi pagati per i sinistri IBNR e per le riaperture, è stata utilizzato il metodo della massima verosimiglianza per la stima dei parametri ed è stata utilizzata la tecnica del *bootstrapping* parametrico [\[Cullen and Frey 1999\]](#) utilizzando il metodo di massima verosimiglianza su ogni set di dati ricampionati per generare la variabilità del parametro da introdurre nella routine di valutazione delle riserve sinistri.

3.2 Modello per la stima degli importi

A partire dalla routine relativa al processo evolutivo del sinistro nei vari stati, si riporta di seguito gli *step* di generazione degli importi dei pagamenti futuri in base alla tipologia dello stato che genera l'importo e tenendo conto dell'incertezza di parametro. I passi dell'algoritmo sono riportati in coerenza con la nomenclatura degli *step* del processo dei numeri:

subroutine per RBNS e riaperture

STEP 2d – Se lo stato generato in STEP 2b è della tipologia $pt = (P, 0)$ o $pp = (P, R)$ vengono generati i parametri della distribuzione del pagato su riservato iniziale per uno stato $E_{pt,pp}^1$ attraverso la tecnica di bootstrapping parametrico con le covariate generate nello STEP 2b e 2c.

STEP 2e – Simulazione dalla distribuzione Log-Normale del pagato su riservato iniziale con i parametri generati nello STEP 2d ed applicazione alla riserva case del singolo sinistro.

STEP 3d – Se lo stato generato in STEP 3b è della tipologia $pt = (P, 0)$ o $pp = (P, R)$ e lo stato precedente è della tipologia $r = (0, R)$ o $pp = (P, R)$ vengono generati i parametri della distribuzione del pagato su riservato iniziale per uno stato $E_{pt,pp}^2$ attraverso la tecnica di bootstrapping parametrico con le covariate generate nello STEP 3b e 3c. Altrimenti se lo stato precedente allo stato generato in STEP 3b è della tipologia $pt = (P, 0)$ o $ss = (0, 0)$ (o lo stato precedente è stato già simulato) vengono generati i parametri della distribuzione del pagato per uno stato $E_{pt,pp}^2$ attraverso la tecnica di bootstrapping parametrico con le covariate generate nello STEP 3b e 3c.

STEP 3e – Simulazione dalla distribuzione Log-Normale del pagato o del pagato su riservato iniziale per la riserva case in base a tipologia di stato iniziale con i parametri generati nello STEP 3d.

STEP SUCCESSIVI – La subrutine 3 è ripetuta per ogni stato successivo con le stesse caratteristiche.

subrutine per IBNR

STEP 2d – Se lo stato generato in STEP 2b è della tipologia $pt = (P, 0)$ o $pp = (P, R)$ vengono generati i parametri della distribuzione dei pagamenti per uno stato $E_{pt,pp}^1$ attraverso la tecnica di bootstrapping parametrico con le covariate generate nello STEP 2b e 2c.

STEP 2e – Simulazione dalla distribuzione Log-Normale del pagato con i parametri generati nello STEP 2d.

STEP SUCCESSIVI – La subrutine 2 per i sinistri IBNR è ripetuta per ogni stato successivo con le stesse caratteristiche.

La natura complessa della simulazione sia del processo dei numeri che degli importi richiede per i sinistri RBNS ed i sinistri chiusi (ma potenzialmente in attesa di una possibile riapertura) che per ogni singolo sinistro nel *dataset* sia eseguita la routine. Tale aspetto comporta un intensivo utilizzo di procedure numeriche di calcolo che come si vedrà nell'applicazioni a dati reali richiede l'utilizzo di tecniche di calcolo in parallelo.

4. Applicazione al ramo R.C. Auto

I dati utilizzati nel presente lavoro derivano da una compagnia di assicurazione Italiana di medie dimensioni che esercita il ramo R.C. Auto, il quale rappresenta il primo ramo in Italia per volume di premi contabilizzati, pari a 13,5 miliardi di Euro e che costituiscono il 42,3% del totale del volume premi nazionale per i segmenti Non-Life³. I dati in oggetto fanno riferimento ai sinistri della gestione No CARD e CARD Gestionaria rientranti nella convenzione CARD tra gli assicuratori italiani introdotta a partire dall'esercizio 2007. Si precisa che vista la natura strettamente riservata dei dati in oggetto non verranno riportati tra i risultati importi espliciti totali ma si farà riferimento ai soli risultati utili all'analisi dell'applicazione del modello e per il confronto con i risultati dei modelli Macro-Level, per quanto riguarda il valore atteso, si utilizzeranno scarti percentuali.

L'applicazione del modello e la calibrazione dei parametri è avvenuta con l'ausilio del software open-source [\[R Core Team 2016\]](#) con l'ausilio dei packages: [\[fitditrplus 2015\]](#) e [\[ChainLadder 2017\]](#). Oltre al codice per lo sviluppo del modello è stato realizzato uno schema di calcolo in parallelo per la diminuzione dei tempi di simulazione.

4.1 I dati empirici

Il portafoglio sinistri fa riferimento a posizioni di risarcimento per responsabilità civili per la circolazione dei sinistri, gestite nel periodo 1 gennaio 2005 al 31 dicembre 2016. I dati fanno riferimento ai soli importi per risarcimenti e spese dirette (ALAE) e non tengono conto delle spese indirette (ULAE). Il numero di sinistri è pari a 1.174.095 ed è più concentrato negli anni recenti visto l'aumento di volumi come mostrato nel Grafico 2. I dati forniti fanno riferimento a tutte le posizioni dei

³ Fonte ANIA – Assicurazione Italiana 2017

sinistri in termini di pagamenti effettuati nel corso dell'esercizio (passo annuale) e la riserva case appostata alla chiusura dell'esercizio stesso. Il *Dataset* originale è strutturato come *Panel Data* per anno di bilancio, codice sinistro con indicati per record anno di denuncia, accadimento, importo pagato e riservato case.

Distribuzione numero sinistri gestiti per anno di accadimento

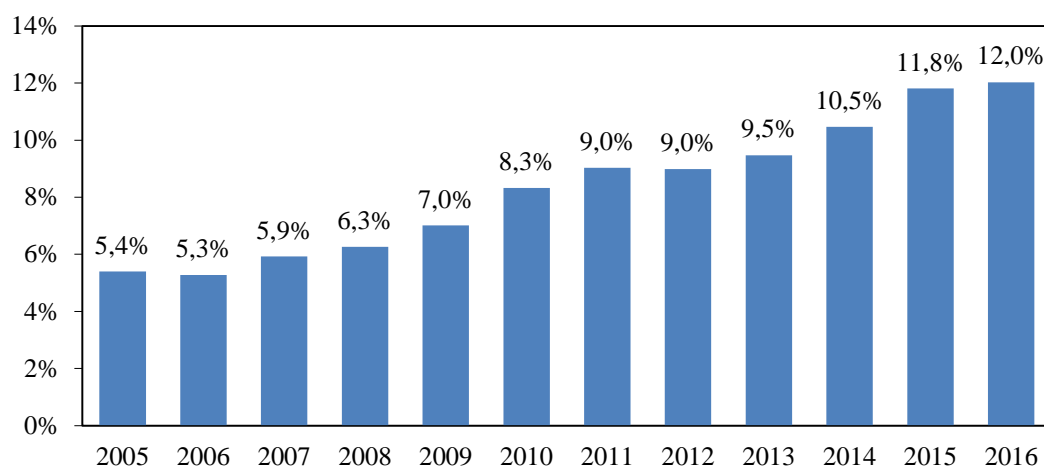


Grafico 2: Distribuzione numero sinistri gestiti per anno di accadimento

Ai fini della valutazione la struttura del *Dataset* è stata riorganizzata per codice sinistro in modo che per ogni osservazione fosse distinta esplicitamente la storia evolutiva in termini di pagamenti e riserva case.

Con i dati riorganizzati sono stati classificati i sinistri per tipologia di stato e storia evolutiva. In particolare, nella Tabella 2 è riportato un riepilogo delle classificazioni per anno di accadimento e ultimo stato registrato dal sinistro. Si può osservare che, vista la natura dei dati alla data di valutazione 2016, per gli anni 2011-2016 non è ancora possibile osservare ulteriori passaggi di stato. Inoltre, per gli altri anni è ancora possibile che vengono osservati altri passaggi di stato come riaperture e pagamenti per sinistri ancora aperti.

	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016
NE	5	17	18	29	70	112	247	408	858	1.505	3.095	19.291
E1	54.975	53.293	60.371	64.340	71.680	84.220	90.885	91.773	96.487	107.644	122.730	121.942
E2	7.177	7.171	7.575	7.375	8.462	11.042	12.024	10.593	11.829	12.447	12.908	
E3	989	1.232	1.354	1.421	1.775	2.009	2.399	2.361	1.894	1.245		
E4	187	196	235	294	318	304	374	342	130			
E5	37	52	48	61	56	61	48	21				
E6	6	6	16	7	3	3	3					
E7	3	2	4	0	1	0						

Tabella 2: Distribuzione numero sinistri per anno di accadimento e ultimo stato registrato alla data di valutazione.

Inoltre, è verosimile attendersi che al passare del tempo la probabilità di osservare un passaggio tra uno stato e l'altro diminuisca fino a non essere più significativa.

(%)	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	Totale
NE	0,05	0,13	0,42	0,64	1,01	0,84	1,44	2,57	4,08	4,18	9,61	22,64	47,61
E1	0,07	0,10	0,00	0,35	1,07	0,57	1,41	1,91	3,55	3,76	8,66	10,63	32,08
E2	0,12	0,23	0,18	0,40	0,64	1,09	1,59	1,85	2,02	2,94	2,47	0,00	13,54
E3	0,02	0,19	0,19	0,27	0,47	0,21	0,65	1,11	1,31	0,64	0,00	0,00	5,07
E4	0,01	0,04	0,20	0,12	0,04	0,25	0,16	0,28	0,17	0,00	0,00	0,00	1,27
E5	0,00	0,00	0,03	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,04
E6	0,00	0,01	0,01	0,11	0,11	0,10	0,05	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,39
E7	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Totale	0,28	0,71	1,04	1,89	3,33	3,06	5,31	7,72	11,13	11,52	20,74	33,27	100,00

Tabella 3: Distribuzione percentuale della riserva case appostata per anno di accadimento e ultimo stato registrato alla data di valutazione.

Per quanto riguarda i soli sinistri a riserva case alla data di valutazione nella Tabella 3 è riportato in termini percentuali la distribuzione delle somme per anno di accadimento e stato del sinistro. Questi importi sono relativi a stati di sinistri a riserva che sono ancora in attesa del primo passaggio di stato, pagamenti parziali e riaperture a riserva. Come si può osservare più del 50% delle somme a riserva case sono appostate per le ultime due generazioni di sinistri e quasi il 50% è appostata per sinistri denunciati che non hanno ancora registrato il primo passaggio di stato.

4.2 Calibrazione del modello per i numeri

Per la calibrazione del modello dell'evoluzione dei numeri nei vari stati di vita del sinistro è stato adottato il pacchetto [\[ChainLadder 2017\]](#) applicato ai triangoli dei numeri per denunciati e per gli stati successivi. Sono stati costruiti i triangoli secondo il seguente schema:

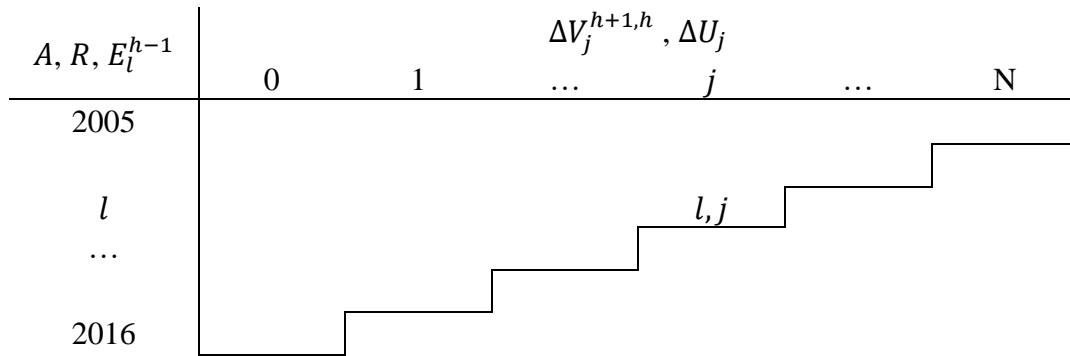


Figura 4: Schema triangolare per la stima del numero e del tempo di arrivo di un passaggio di stato

Per ognuno dei parametri stimati, utilizzando la tecnica bootstrapping con 10.000 simulazioni, è stata ricavata la distribuzione associata al parametro sia per quanto riguarda la distribuzione del tempo di arrivo di un passaggio di stato (ad es. la denuncia). Di seguito sono riportati le intensità del modello di Poisson per il numero di IBNR per anno di accadimento:

Stima Numero Denunciati per Anno di Accadimento												
Statistiche	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016
Media	0	0	1	1	2	5	13	29	67	155	667	10150
Std. Dev	0	0	2	2	3	5	8	11	16	23	49	225
CoV (%)	-	-	210,7	220,5	159,9	107,2	61,7	37,2	23,1	15,2	7,4	2,2
5° perc.	0	0	0	0	1	3	10	23	56	134	611	9852
95° perc.	0	0	7	8	11	20	35	57	106	210	771	10587

Tabella 4: Stima numero di sinistri denunciati per anno di accadimento

Come si può osservare dalla tabella 4 i risultati della stima mostrano una forte variabilità per le generazioni più vecchie rispetto alla data di valutazione. La stima dei numeri IBNR dipende come riportato nel [Paragrafo 2.2](#) dalla stima della distribuzione a tempo discreto e finito del numero di anni tra l'accadimento e la denuncia:

Distribuzione a tempo discreto e finito del ritardo tra la denuncia e l'accadimento del sinistro												
(%)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Media	93,30	6,23	0,35	0,07	0,03	0,02	0,01	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Std. Dev	0,12	0,11	0,03	0,01	0,01	0,01	0,01	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
CoV	0,12	1,79	8,14	19,51	28,83	44,89	70,08	112,80	220,95	58,55	370,85	-
5° perc.	93,07	6,06	0,31	0,05	0,02	0,01	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
95° perc.	93,45	6,43	0,41	0,09	0,05	0,03	0,02	0,01	0,01	0,00	0,01	0,00

Tabella 5: Distribuzione a tempo discreto e finito del ritardo tra la denuncia e l'accadimento del sinistro.

In base ai due parametri stimati è possibile fornire al modello sia il numero che il tempo in cui avverrà la denuncia. Per quanto riguarda invece le probabilità di passaggio al primo stato dopo la denuncia e la relativa distribuzione discreta a tempo finito del *lag* temporale tra la denuncia e il primo passaggio di stato si riportano le stime ottenute congiunte delle probabilità e il tempo sia per i sinistri IBNR che per i sinistri RBNS:

Distribuzioni temporali del lag tra la denuncia e il primo evento e le probabilità di passaggio associate (%)

Media	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	Prob.
PT = (P,0)	85,63	12,90	0,77	0,33	0,17	0,09	0,05	0,03	0,01	0,01	0,01	0,00	74,9
PP = (P,R)	87,24	10,00	1,26	0,64	0,37	0,23	0,14	0,07	0,03	0,03	0,01	0,00	8,8
SS = (0,0)	75,52	17,83	3,65	1,45	0,68	0,34	0,24	0,14	0,09	0,04	0,02	0,00	16,4

Std. Dev	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	Prob.
PT = (P,0)	0,27	0,25	0,07	0,05	0,04	0,03	0,02	0,02	0,01	0,02	0,02	0,00	0,2
PP = (P,R)	0,25	0,22	0,09	0,07	0,06	0,05	0,04	0,03	0,02	0,02	0,02	0,00	0,1
SS = (0,0)	0,77	0,66	0,34	0,24	0,17	0,12	0,11	0,09	0,08	0,06	0,05	0,00	0,2

5° percentile	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	Prob.
PT = (P,0)	85,10	12,51	0,67	0,26	0,13	0,06	0,03	0,01	0,00	0,00	0,00	0,00	74,4
PP = (P,R)	86,81	9,64	1,12	0,53	0,28	0,16	0,08	0,03	0,01	0,01	0,00	0,00	8,6
SS = (0,0)	74,04	16,72	3,11	1,09	0,45	0,19	0,12	0,05	0,02	0,00	0,00	0,00	16,0

95° percentile	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	Prob.
PT = (P,0)	85,99	13,34	0,90	0,43	0,25	0,14	0,10	0,08	0,05	0,06	0,05	0,00	75,2
PP = (P,R)	87,64	10,35	1,41	0,75	0,46	0,31	0,21	0,13	0,07	0,08	0,05	0,00	8,9
SS = (0,0)	76,56	18,90	4,24	1,87	0,99	0,59	0,47	0,34	0,28	0,19	0,16	0,00	16,8

Tabella 6: Distribuzioni temporali del lag tra la denuncia e il primo evento e le probabilità di passaggio associate.

A differenza della proiezione della riserva IBNR dove sono state utilizzate direttamente le probabilità stimate contenute nella Tabella 6, per i sinistri già denunciati si è tenuto conto dell'informazione già realizzata per singolo anno di denuncia per correggere le probabilità di passaggio di stato. Infatti l'applicazione del metodo Chain Ladder al triangolo per denuncia e sviluppo del primo passaggio di stato consente di stimare per anno di denuncia le probabilità specifiche. Di seguito si riporta il dettaglio per anno di denuncia delle probabilità stimate:

Media	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016
PT = (P,0)	-	-	57,82	52,85	45,41	44,75	44,05	44,85	46,00	45,92	45,38	67,73
PP = (P,R)	-	-	7,77	11,44	10,01	10,86	11,94	12,98	12,48	11,45	9,95	7,04
SS = (0,0)	-	-	34,41	35,71	44,59	44,39	44,00	42,17	41,52	42,62	44,68	25,22

Tabella 7: Probabilità di passaggio al primo stato per anno di denuncia RBNS

Per ricavare le probabilità di passaggio della tabella 7 è stata utilizzata la seguente relazione:

$$P(\tau E_{k,l}^h = \tau_i) = P(\tau E_k^h = \tau_i | \Delta V^{h+1,h} = T - l), \quad \text{con } l \leq T \quad (20)$$

dove la probabilità di passaggio ad uno stato h -esimo, avendo già registrato lo stato precedente nel periodo l antecedente alla data di valutazione T , è condizionata al numero di periodi già passati tra l e T . Si precisa che per gli anni di denuncia 2005 e 2006 vista l'assenza di osservazioni è stata ipotizzata la stessa probabilità del 2007.

In merito a tutti gli altri parametri delle probabilità di passaggio di stato le tabelle sono riportate nell'[Appendice A](#). Vista la ridotta numerosità dei sinistri che mostrano un stato successivo al 4, vedi Tabella 2, per gli eventi successivi al quinto sono state utilizzate le stesse probabilità e distribuzioni temporali del quarto stato.

4.3 Calibrazione del modello per gli importi

In questo paragrafo sono riportati i dettagli del *fitting* delle distribuzioni degli importi dei pagamenti per i sinistri IBNR, per le riaperture ed i sinistri con stati precedenti simulati e la calibrazione della distribuzione per il rapporto pagato su riservato. Le analisi sono state effettuate in entrambi i casi con l'ausilio del metodo della massima verosimiglianza e per ogni distribuzione è stato effettuato il *resampling* per la stima della variabilità dei parametri. La scelta dell'unica distribuzione Log-Normale, seppur non mostrando un perfetto *fitting* in tutte le casistiche, salvaguarda la coerenza dei parametri con le variabili note nel processo di riservazione.

La calibrazione delle distribuzioni degli importi è stata suddivisa in tre sottoclassi: la prima relativa ai sinistri IBNR, la seconda relativa alle riaperture ed i sinistri con stati precedenti simulati e l'ultima dedicata al *fitting* della distribuzione del pagato su riservato iniziale.

Fitting Pagamenti IBNR

Per la stima dell'importo dei pagamenti dovuti a sinistri tardivi si è scelto di calibrare utilizzando le covariate: tempo di attesa del passaggio tra uno stato condizionatamente ad almeno un anno di ritardo della denuncia rispetto all'accadimento. Utilizzando il ricampionamento parametrico con 10.000 simulazioni è stata ricavata la distribuzione associata ai parametri della Log-Normale. Di seguito si riportano i valori dei parametri relativi ai pagamenti nel primo stato successivo alla denuncia del sinistro:

$E^1 = pt \mid \Delta V^1 = 0, \Delta U \geq 1$				
	Stima	Mediana	2,50%	97,50%
μ	6,9517	6,9517	6,9420	6,9616
σ	0,9939	0,9939	0,9871	1,0008
Media	1.712	1.712	1.684	1.741
Std. Dev	2.223	2.223	2.163	2.285

$E^1 = pt \mid \Delta V^1 = 1, \Delta U \geq 1$				
	Stima	Mediana	2,50%	97,50%
μ	7,7384	7,7388	7,6951	7,7833
σ	1,1138	1,1130	1,0820	1,1448
Media	4.267	4.265	3.946	4.622
Std. Dev	6.689	6.677	5.886	7.607

$E^1 = pt \mid \Delta V^1 = 2, \Delta U \geq 1$				
	Stima	Mediana	2,50%	97,50%
μ	8,1829	8,1827	8,1011	8,2644
σ	1,0187	1,0168	0,9595	1,0756
Media	6.014	6.001	5.226	6.925
Std. Dev	8.121	8.079	6.424	10.225

$E^1 = pt \mid \Delta V^1 \geq 3, \Delta U \geq 1$				
	Stima	Mediana	2,50%	97,50%
μ	8,5381	8,5362	8,4433	8,6301
σ	1,0305	1,0286	0,9624	1,0955
Media	8.683	8.649	7.379	10.200
Std. Dev	11.944	11.861	9.112	15.539

Tabella 8: Parametri Log-Normale per sinistri IBNR nel primo stato con pagamento (pt)

Come noto il tempo di sviluppo dei pagamenti è correlato positivamente con il loro valore atteso e come si può osservare dalla Tabella 8 i pagamenti per sinistri, con almeno un anno tra la denuncia e l'accadimento, mostrano un valore atteso crescente al crescere del tempo di attesa del primo passaggio di stato con pagamento definitivo. Le stesse osservazioni possono essere fatte per i pagamenti parziali che, come riportato nella Tabella 9, mostrano un incremento del costo medio del pagato al crescere del tempo di attesa del primo passaggio di stato:

$E^1 = pp \mid \Delta V^1 = 0, \Delta U \geq 1$				
	Stima	Mediana	2,50%	97,50%
μ	7,8444	7,8442	7,8016	7,8875
σ	1,1897	1,1893	1,1587	1,2206
Media	5.177	5.174	4.783	5.611
Std. Dev	9.142	9.130	8.044	10.400

$E^1 = pp \mid \Delta V^1 \geq 1, \Delta U \geq 1$				
	Stima	Mediana	2,50%	97,50%
μ	8,2040	8,2033	8,0855	8,3224
σ	1,2335	1,2316	1,1480	1,3155
Media	7.822	7.799	6.276	9.776
Std. Dev	14.798	14.712	10.381	21.068

Tabella 9: Parametri Log-Normale per sinistri IBNR nel primo stato con pagamento (pp)

I parametri stimati per tutti gli altri passaggi di stato successivi al primo sono riportati nell'[Appendice B](#). Vista la poca numerosità delle osservazioni oltre il 4 stato (vedi Tabella 2) sono state aggregate le osservazioni relative a tutti i stati successivi (dal 4 compreso in poi). Si è inoltre tenuto conto, per i passaggi tra il primo e il secondo stato, della dipendenza dell'importo dei pagamenti rispetto allo stato di provenienza.

Fitting Pagamenti per Riaperture e per sinistri con stati simulati

Nel caso dei sinistri riaperti o con stati precedenti simulati nella routine, non avendo a disposizione la riserva case nel periodo precedente al pagamento, non è stato utilizzato il rapporto pagato su riservato iniziale del periodo ma si è fatto riferimento direttamente alla distribuzione dei pagamenti condizionata allo stato precedente e al numero di anni di attesa per il passaggio di stato. Entrambe le casistiche possono essere rilevate dal secondo passaggio di stato e per i successivi. Di seguito si riportano le stime con gli intervalli di confidenza stimati con la tecnica bootstrapping per le riaperture da senza seguito:

$E^2 = pt \mid E^1 = ss, \Delta V^2 = 1$				
	Stima	Mediana	2,50%	97,50%
μ	7,0695	7,0695	7,0449	7,0942
σ	1,2089	1,2085	1,1914	1,2257
Media	2.441	2.440	2.332	2.554
Std. Dev	4.442	4.437	4.129	4.773

$E^2 = pt \mid E^1 = ss, \Delta V^2 = 2$				
	Stima	Mediana	2,50%	97,50%
μ	7,3129	7,3128	7,2461	7,3792
σ	1,2282	1,2276	1,1804	1,2733
Media	3.188	3.185	2.815	3.604
Std. Dev	5.981	5.970	4.899	7.261

$E^2 = pt \mid E^1 = ss, \Delta V^2 = 3$				
	Stima	Mediana	2,50%	97,50%
μ	7,3064	7,3074	7,1822	7,4337
σ	1,2372	1,2350	1,1495	1,3239
Media	3.203	3.197	2.547	4.064
Std. Dev	6.094	6.063	4.223	8.877

$E^2 = pt \mid E^1 = ss, \Delta V^2 \geq 4$				
	Stima	Mediana	2,50%	97,50%
μ	7,1168	7,1164	6,9509	7,2814
σ	1,3348	1,3301	1,2149	1,4494
Media	3.004	2.984	2.184	4.154
Std. Dev	6.676	6.581	4.012	11.125

Tabella 10: Parametri Log-Normale per sinistri riaperti da senza seguito (ss)

Come mostrato nella Tabella 10 il costo medio del pagato per i sinistri riaperti da senza seguito mostra un rialzo nei primi due anni di attesa della riapertura per poi dopo il quarto anno (e successivi) tornare ad assestarsi su valori lievemente inferiori anche se non significativi⁴. Invece nel caso di riaperture da pagamenti definitivi si osserva nella Tabella 11 un trend di crescita significativo⁵ del costo medio anche alle antidurate oltre la quarta (tempo di attesa tra il pagamento definitivo e la riapertura):

⁴ Applicando il T-test sulla differenza tra le medie empiriche dei pagamenti tra antidurata 3 e la 4 e successive si ottiene, con un livello di significatività del 5%, il non superamento del test (p-value=0.63050).

⁵ Applicando il T-test sulla differenza tra le medie empiriche dei pagamenti tra antidurata 3 e la 4 e successive si ottiene, con un livello di significatività del 5%, il superamento del test (p-value= 0,00703).

$E^2 = pt \mid E^1 = pt, \Delta V^2 = 1$				
	Stima	Mediana	2,50%	97,50%
μ	6,6225	6,6222	6,6063	6,6389
σ	1,1646	1,1646	1,1529	1,1762
Media	1.481	1.481	1.438	1.526
Std. Dev	2.515	2.514	2.396	2.639

$E^2 = pt \mid E^1 = pt, \Delta V^2 = 2$				
	Stima	Mediana	2,50%	97,50%
μ	6,7665	6,7664	6,7225	6,8103
σ	1,1320	1,1315	1,0999	1,1630
Media	1.648	1.647	1.521	1.784
Std. Dev	2.658	2.654	2.334	3.021

$E^2 = pt \mid E^1 = pt, \Delta V^2 = 3$				
	Stima	Mediana	2,50%	97,50%
μ	6,7538	6,7542	6,6631	6,8454
σ	1,0980	1,0968	1,0328	1,1617
Media	1.567	1.565	1.335	1.845
Std. Dev	2.396	2.389	1.842	3.117

$E^2 = pt \mid E^1 = pt, \Delta V^2 \geq 4$				
	Stima	Mediana	2,50%	97,50%
μ	6,9944	6,9935	6,8777	7,1093
σ	1,1325	1,1295	1,0492	1,2134
Media	2.071	2.062	1.683	2.554
Std. Dev	3.343	3.312	2.383	4.681

Tabella 11: Parametri Log-Normale per sinistri riaperti da pagamenti definitivi (pt)

Per quanto riguarda le stime associate a tutti gli altri parametri delle distribuzioni dei pagamenti si rimanda all' [Appendice B](#).

Fitting rapporto Pagato su Riservato Iniziale

La stima del rapporto pagato su riservato è stata condotta in termini di distribuzione marginale rispetto sia al Pagato che al Riservato Case Iniziale. Come è possibile osservare dal Grafico 2 dove è mostrata la distribuzione empirica dalle variabile rapporto pagato su riservato, si riscontra una concentrazione delle osservazioni intorno all'unità (Run-off zero della riserva case).

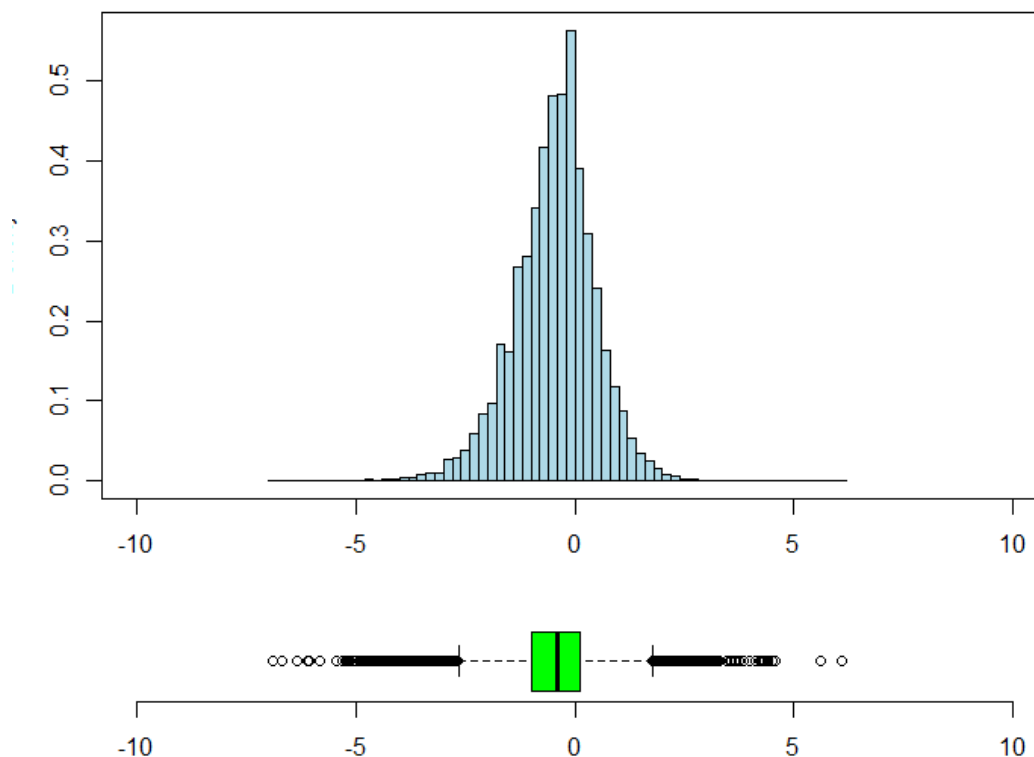


Grafico 2: Distribuzione empirica pagamenti definitivi su riserva case iniziale

Per quanto riguarda le dipendenze del rapporto rispetto ad altre variabili, in questo elaborato si è scelto di considerare solamente quella rispetto allo stato di pagamento successivo (pagato definitivo o parziale), eventuali dipendenze tra l'antidurata dello stato di pagamento e il livello di riserva case associata, non sono state prese in considerazione.

Di seguito si riporta la stima dei parametri delle distribuzioni fittate distinte per stato e tipologia di pagamento:

$E^1 = pt$				
	Stima	Mediana	2,50%	97,50%
μ	-0,4617	-0,4617	-0,4672	-0,4561
σ	0,9248	0,9247	0,9209	0,9287
Media	96,6%	96,6%	95,8%	97,5%
Std. Dev	112,4%	112,4%	110,6%	114,1%

$E^1 = pp$				
	Stima	Mediana	2,50%	97,50%
μ	-0,9137	-0,9138	-0,9386	-0,8888
σ	1,3162	1,3161	1,2988	1,3338
Media	95,4%	95,3%	90,9%	100,1%
Std. Dev	205,7%	205,6%	190,8%	222,0%

$E^2 = pt$				
	Stima	Mediana	2,50%	97,50%
μ	-0,3526	-0,3526	-0,3599	-0,3453
σ	0,8851	0,8852	0,8798	0,8904
Media	104,0%	104,0%	102,8%	105,2%
Std. Dev	113,4%	113,4%	111,1%	115,7%

$E^2 = pp$				
	Stima	Mediana	2,50%	97,50%
μ	-0,9319	-0,9319	-0,9551	-0,9089
σ	1,1721	1,1721	1,1557	1,1882
Media	78,3%	78,3%	75,0%	81,6%
Std. Dev	134,5%	134,4%	125,6%	143,8%

$E^3 = pt$				
	Stima	Mediana	2,50%	97,50%
μ	-0,2075	-0,2074	-0,2270	-0,1878
σ	0,8578	0,8579	0,8443	0,8715
Media	117,4%	117,4%	113,8%	121,2%
Std. Dev	122,4%	122,5%	116,1%	129,2%

$E^3 = pp$				
	Stima	Mediana	2,50%	97,50%
μ	-0,7770	-0,7767	-0,8362	-0,7175
σ	1,2429	1,2420	1,2007	1,2843
Media	99,5%	99,5%	89,1%	111,3%
Std. Dev	191,1%	190,7%	160,1%	228,2%

$E^{\geq 4} = pt$				
	Stima	Mediana	2,50%	97,50%
μ	-0,1724	-0,1719	-0,2238	-0,1212
σ	0,8671	0,8664	0,8306	0,9022
Media	122,6%	122,6%	112,9%	133,1%
Std. Dev	129,8%	129,6%	112,5%	149,2%

$E^{\geq 4} = pp$				
	Stima	Mediana	2,50%	97,50%
μ	-0,8462	-0,8455	-0,9825	-0,7077
σ	1,2510	1,2470	1,1527	1,3485
Media	93,8%	93,4%	72,7%	122,3%
Std. Dev	182,5%	180,6%	121,2%	277,9%

Tabella 12: Parametri Log-Normale pagato su riservato case iniziale

I parametri presentati sono stati calibrati direttamente sulle distribuzioni empiriche del rapporto ad esclusione di un numero limitato di sinistri con valori di riserva case forfettari ed inferiore a 200 Euro (più del 50% riservati ad un Euro).

4.4 Risultati dei modelli di stima

In questo paragrafo sono riportati i risultati dell'applicazione del modello ai sinistri IBNR e ai sinistri RBNS e riaperture. Per la valutazione della riserva sinistri sono state effettuate 10.000 simulazioni per entrambe le tipologie di sinistri. Visto l'elevato carico computazionale soprattutto per i sinistri RBNS e le riaperture dove il modello per ognuno dei sinistri nel dataset (1.174.095) effettua una simulazione dell'evoluzione di stato ed eventualmente di pagamento dei sinistri, è stato utilizzato uno schema di calcolo in parallelo con 8 unità di calcolo al quale sono stati distribuiti i dati dei singoli sinistri e la routine da eseguire. L'algoritmo di generazione dei numeri pseudo-causali utilizzato è il Mersenne Twister [\[Matsumoto Nishimura 1998\]](#) (di default in [\[R Core 2017\]](#)), ed i semi di partenza dell'algoritmo sono stati a loro volta generati casualmente da una sequenza con un seme di origine. Tale approccio consente di mantenere l'indipendenza delle simulazioni nelle diverse unità di calcolo.

Riserva IBNR

Il modello consente di ottenere la distribuzione degli importi futuri generati sia per anno di accadimento che per anno futuro di pagamento. Nella Tabella 13 sono riportati i valori per anno di accadimento dei CoV stimati e l'asimmetria:

AY	CoV	Skewness
2005		
2006		
2007	276,060%	7,5503
2008	291,710%	15,0115
2009	160,406%	4,3249
2010	111,418%	5,3190
2011	74,867%	4,6469
2012	53,794%	2,3225
2013	43,218%	10,1680
2014	27,070%	2,7992
2015	12,985%	0,9024
2016	3,985%	1,0187
Totale	3,924%	0,8974

Tabella 13: Coefficiente di Variazione e Asimmetria per anno di generazione e totale IBNR.

La riserva stimata dal modello mostra per generazione un coefficiente di variabilità sempre maggiore dovuto in particolare all'errore di parametro più significativo per le generazioni più anziane. Per quanto riguarda l'asimmetria, la riserva stimata mostra un valore positivo per tutti le generazioni dei sinistri.

Riserva stimata per Anno di Bilancio

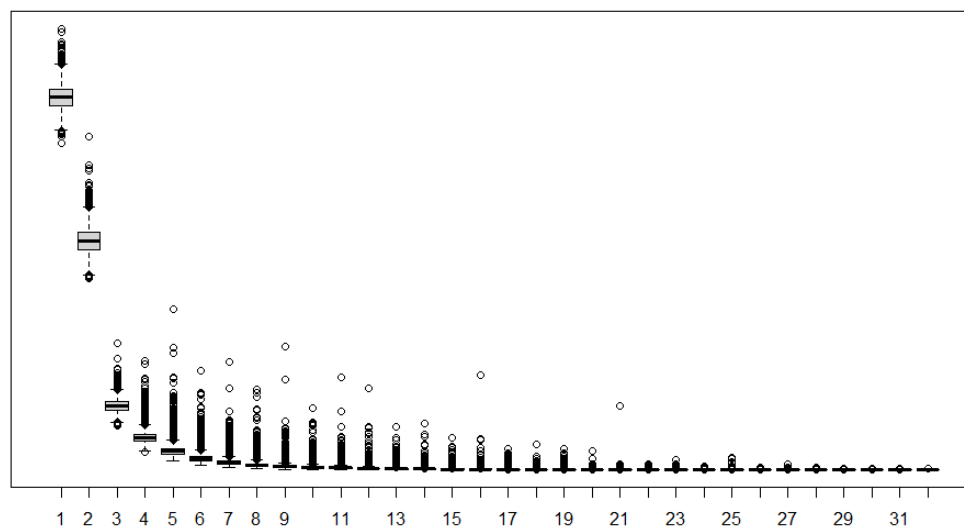


Grafico 3: Distribuzione Riserva IBNR stimata per anno di pagamento.

Da Grafico 3 si può osservare che l'utilizzo della distribuzione del tempo di passaggio tra uno stato e il successivo fornisce una probabilità positiva ai pagamenti

anche in anni molto distanti dall'anno di valutazione (2016). Nel Grafico 4 sono riportate le distribuzioni degli importi a riserva per anno di accadimento:

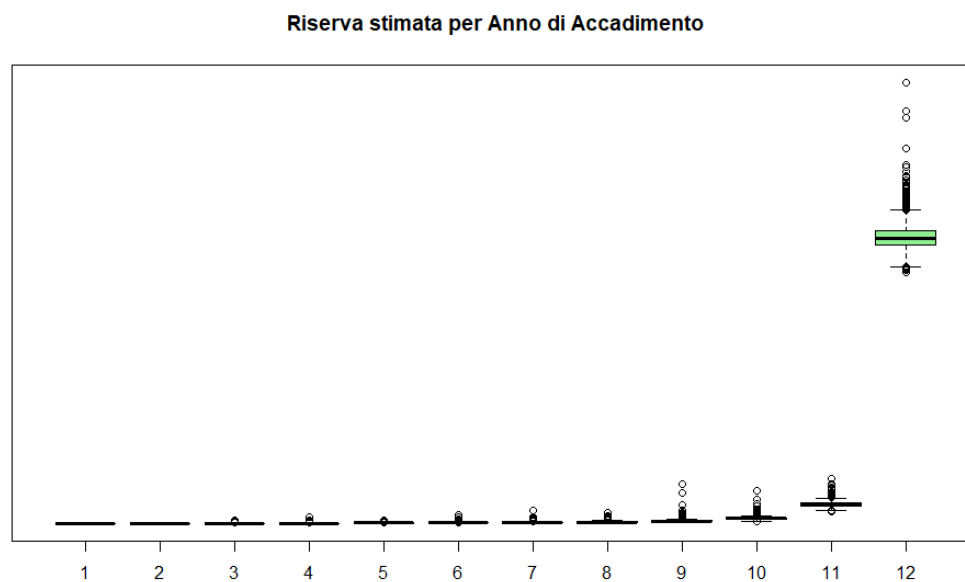


Grafico 4: Distribuzione Riserva IBNR stimata per anno di accadimento.

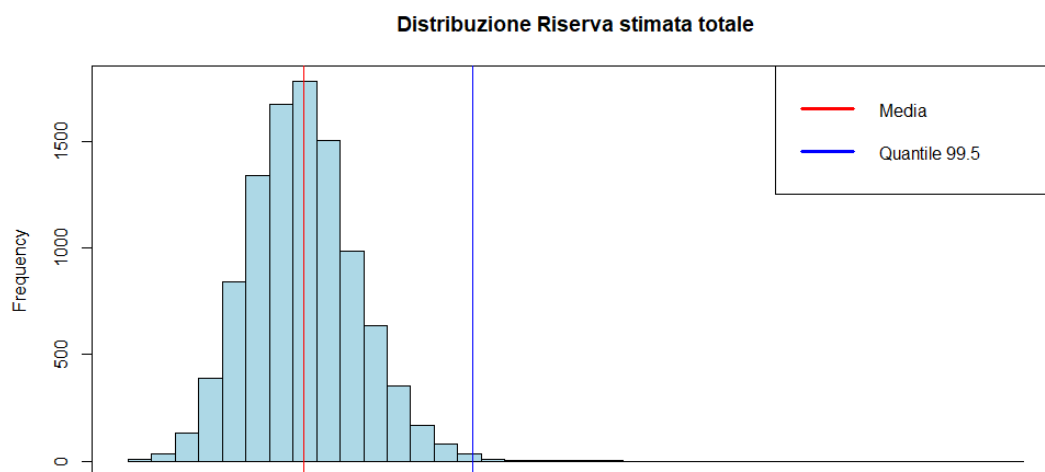


Grafico 5: Distribuzione Riserva stimata totale IBNR.

Riserva per sinistri già denunciati

I risultati ottenuti applicando il modello ai sinistri nel *dataset* (RBNS e riaperture) mostra una variabilità (CoV) totale leggermente più bassa rispetto a quella della riserva stimata per sinistri IBNR. Per generazione, vista anche la maggiore entità del valore atteso della riserva, i coefficienti di variazione tendono ad essere meno marcati nelle generazioni più anziane rispetto alla riserva per IBNR:

AY	CoV	Skewness
2005	61,771%	13,5194
2006	49,170%	3,6119
2007	44,982%	12,1842
2008	31,312%	2,2852
2009	27,078%	1,6673
2010	23,917%	2,2541
2011	16,920%	2,1825
2012	15,382%	1,2273
2013	13,062%	1,0510
2014	10,346%	1,6959
2015	7,835%	0,8080
2016	4,400%	0,9093
Totale	3,820%	0,4192

Tabella 14: Coefficiente di Variazione e Asimmetria per anno di generazione e Totale RBNS e riaperture.

La distribuzione temporale dei pagamenti mostra un andamento decrescente meno marcato rispetto alla riserva IBNR, come riportato nel grafico 6:

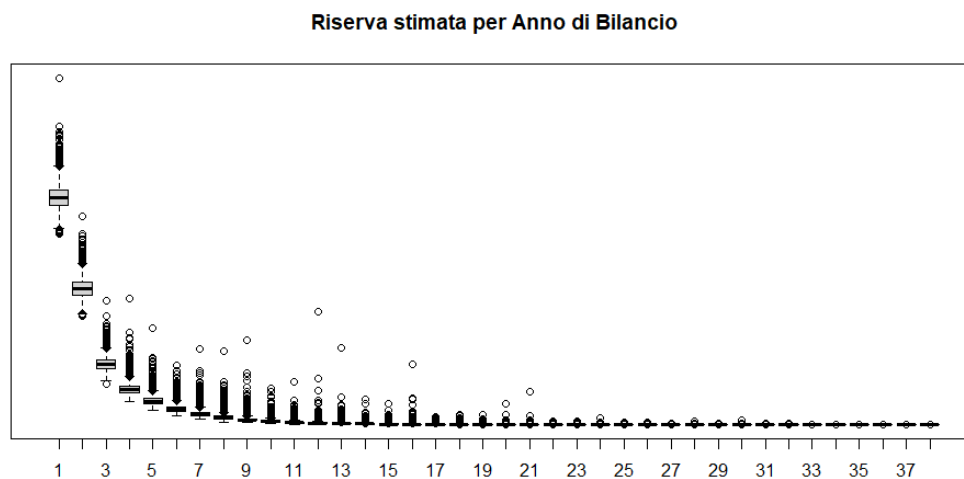


Grafico 6: Distribuzione Riserva RBNS e Riaperture stimata per anno di pagamento.

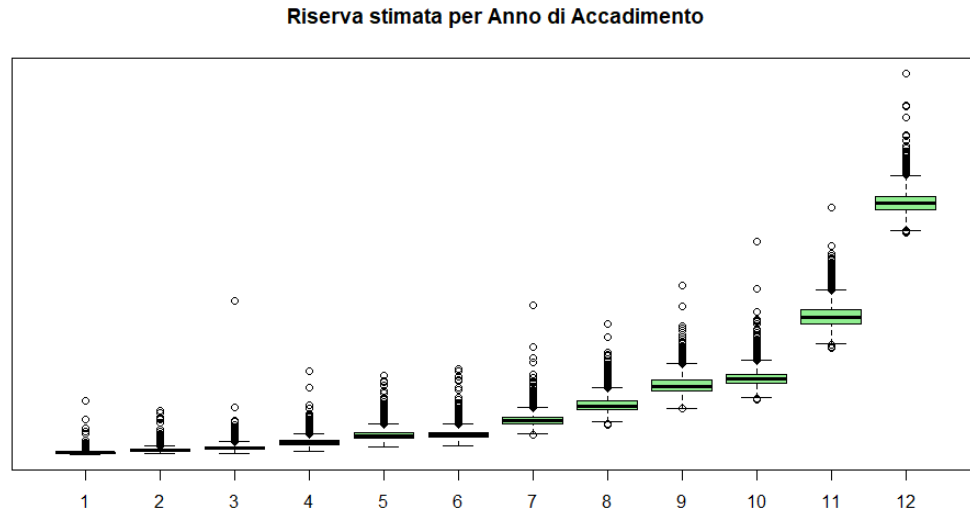


Grafico 7: Distribuzione Riserva RBNS e Riaperture stimata per anno di accadimento.

Le varie generazioni dei sinistri mostrano (vedi la Tabella 14) un'asimmetria crescente con l'aumentare del numero di anni rispetto alla data di valutazione. Infine nel Grafico 8 è riportata la distribuzione simulata della riserva per sinistri già denunciati con indicata la media e il quantile al 99,5% (il rapporto tra il quantile al 99.5% e la media è pari a 111,03%).

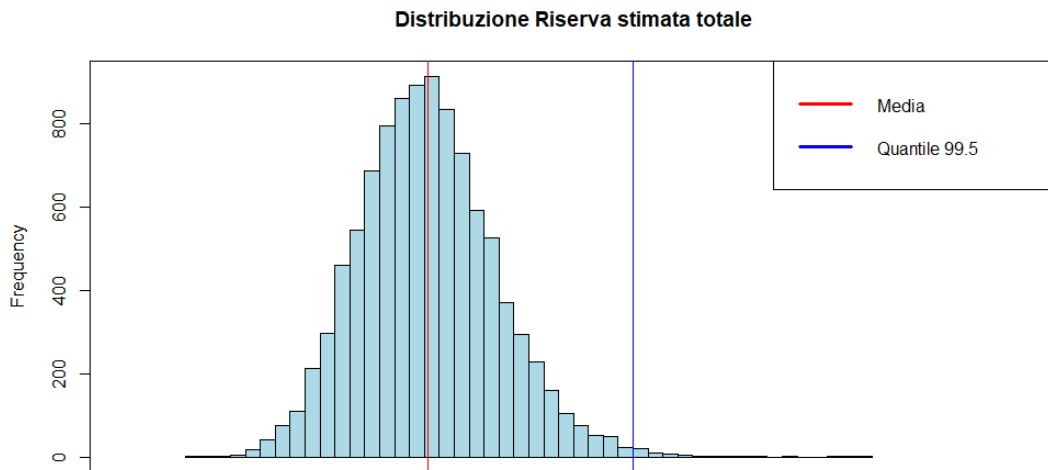


Grafico 8: Distribuzione Riserva stimata totale per sinistri già denunciati.

4.5 Analisi di confronto con i modelli Macro-Level

In quest'ultima parte dell'elaborato sono riportati i confronti tra la stima aggregata tra la riserva IBNR e la riserve RBNS e per riaperture del modello e quella ottenuta con l'applicazione dei seguenti modelli:

- Mack Chain Ladder Paid;
- Mack Chain Ladder Incurred;
- Metodo di Dahms;
- Over-dispersed Poisson Chain Ladder Paid (ODP).

Si fa presente che per i primi tre modelli, essendo *distribution-free* saranno confrontati solo in termini di aspettativa e Coefficiente di Variazione (CoV). L'aggregazione dei risultati delle simulazioni tra la riserva IBNR e RBNS e Riaperture è avvenuta con ipotesi di indipendenza tra le due distribuzioni. Nella Tabella 15 sono riportati i risultati dell'applicazione dei 4 modelli in termini di scostamento percentuale dall'aspettativa del modello in oggetto. Si può osservare come i risultati complessivi siano prossimi ai risultati ottenuti con i modelli basati sulla sola evoluzione del pagato (Mack Paid e ODP) e più distanti da quelli che proiettano l'incurred (Mack Incurred e Dahms). A livello di singola generazione corrente (2016), dove sono concentrati i maggiori volumi di riserva case (circa il 35% del totale delle generazioni) e dove la stima dei tardivi è più significativa, si osserva invece una maggiore comparabilità dei risultati rispetto ai metodi basati sull'incurred rispetto a quelli sul pagato.

Si fa presente che nella predisposizione dei modelli Mack Paid e ODP è stata fatta un'ipotesi di fattore coda stimata attraverso l'estrapolazione lineare del logaritmo dei fattori di sviluppo \hat{f}_i ⁶.

⁶ Si veda per maggiori informazioni i dettagli del pacchetto [\[ChainLadder 2017\]](#)

Rapporti rispetto a Valore atteso Modello Individual (100%)				
AY	Modello Mack Paid	Modello Mack Incurred	Modello Dahms	Modello ODP
2005	66,2%	113,8%	113,8%	66,18%
2006	38,5%	121,8%	123,9%	38,56%
2007	76,6%	133,1%	135,8%	76,73%
2008	61,9%	142,3%	156,5%	61,35%
2009	60,1%	155,2%	176,4%	59,78%
2010	90,8%	149,5%	160,6%	90,70%
2011	87,2%	149,2%	163,2%	86,98%
2012	75,9%	144,3%	160,1%	75,78%
2013	79,2%	147,4%	162,1%	78,95%
2014	112,1%	138,7%	144,5%	111,80%
2015	108,1%	129,0%	133,2%	107,81%
2016	113,9%	100,5%	101,7%	113,84%
Totale	101,3%	124,1%	130,4%	101,17%

Tabella 15: Rapporti tra il valore atteso dei singoli modelli e il modello individual (100%).

Confronto CoV						
AY	Modello Individual	Modello Mack Paid	Modello Mack Incurred	Modello di Dahms Paid	Modello di Dahms Incurred	Modello ODP
2005	61,77%	61,70%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
2006	49,17%	70,50%	0,08%	17,41%	0,08%	170,22%
2007	44,95%	32,71%	0,78%	20,42%	0,27%	52,05%
2008	31,30%	26,28%	6,65%	17,47%	13,78%	41,07%
2009	27,06%	20,19%	6,84%	14,75%	13,54%	31,21%
2010	23,88%	16,61%	10,81%	15,86%	16,47%	24,34%
2011	16,89%	16,58%	8,67%	12,91%	13,90%	18,72%
2012	15,35%	13,53%	6,88%	10,85%	11,87%	16,34%
2013	13,02%	12,05%	6,64%	9,63%	10,59%	13,56%
2014	10,28%	10,43%	7,57%	9,05%	10,16%	10,96%
2015	7,72%	8,69%	6,63%	7,72%	8,56%	8,70%
2016	3,94%	8,39%	6,67%	6,69%	7,13%	7,57%
Totale	3,64%	5,67%	3,63%	5,67%	5,42%	5,85%

Tabella 16: CoV stimati per modello e per generazione di accadimento.

In termini di CoV, riportati nella Tabella 16, il modello individuale mostra valori prossimi a quelli ottenuti con il modello di Mack applicato al triangolo di Run-Off dell'Incurred (che non valuta la variabilità per la coda del triangolo) anche se per generazione più anziane mostra un'elevata variabilità come nel caso del modello ODP che è l'unico tra i modelli confrontati ad essere basato su una tecnica di bootstrapping.

Per quanto riguarda invece la forma della distribuzione, confrontando il modello individuale con il modello ODP, si può osservare dal Grafico 9 come il modello individuale mostri una ridotta variabilità rispetto a ODP e una maggiore *skewness* come riportato in Tabella 17:

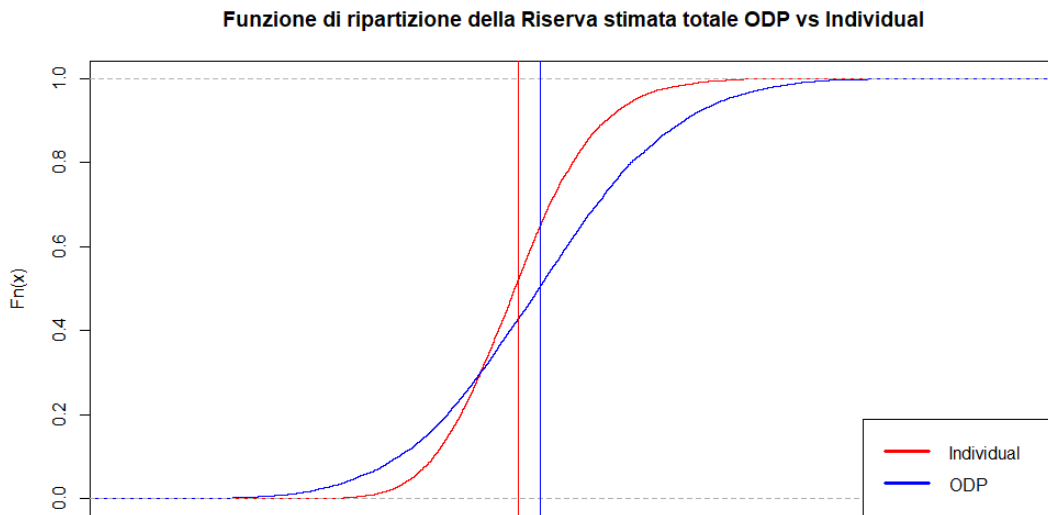


Grafico 9: Funzione di ripartizione delle distribuzioni simulate con ODP ed il modello Individual.

La distribuzione del modello proposto è più concentrata rispetto a quella del modello ODP e mostra una asimmetria positiva più accentuata tipica della variabile riserva sinistri.

	ODP	Individual
Skewness	8,23%	41,76%

Tabella 17: Confronto tra l'asimmetria della distribuzione della riserva sinistri stimata con il modello ODP e con il modello individuale

Aggregazione tra modelli di stima della Riserva Sinistri

Come riportato nel [Paragrafo 1.5](#) vista la pratica in uso nel mondo attuariale di utilizzare una pluralità di modelli per la stima della riserva sinistri si ripropone una stima esemplificativa del CoV aggregato utilizzando un vettore di pesi così come riportato nella tabella 17:

Modello	CoV	ω_i
Mack Paid	5,50%	20%
Mack Incurred	3,63%	20%
Dahms Paid	5,67%	10%
Dahms Incurred	5,42%	10%
ODP	5,65%	20%
Individual	3,64%	20%
Aggregato	12,73%	100%

Tabella 17: CoV stimati per modello e CoV aggregato.

L'aumento della variabilità dovuto all'aggregazione dipende naturalmente dalla forte eterogeneità delle stime delle aspettative nei vari modelli utilizzati. Tale variabilità aggiuntiva dovrebbe essere ridotta svolgendo analisi sulla bontà d'adattamento dei modelli attuariali che però come spesso capita nella pratica si basano su dati di input molto eterogenei che non mostrano continuità nelle politiche di gestione e amministrazione della riserva sinistri.

Conclusioni e futuri sviluppi

Recenti studi hanno sottolineato come i modelli di tipo individuale o Micro-Level consentono di ottenere migliori performance nella stima della riserva sinistri rispetto ai modelli di tipo tradizionale basati sui soli triangoli di Run-Off. Visto l'elevato sviluppo delle analisi basate sui big data questi modelli troveranno nei prossimi anni sempre più spazio anche da un punto di vista operativo. La stima della variabilità della riserva sinistri sarà sempre di più una tematica di forte interesse visto l'avvento della normativa Solvency II che si trova a pieno regime negli stati membri dell'Unione Europea. L'utilizzo di metodologie basate esclusivamente sulla struttura triangolare non consente di tener conto di tutte le dinamiche gestionali che possono influire sul processo di riservazione compresa l'analisi del rischio di Run-Off delle riserve case.

Tali considerazioni hanno portato alle analisi contenute nel presente lavoro dove si è indagato attraverso la costruzione di un modello di tipo individuale sulle variabili gestionali di interesse nel processo di liquidazione e riservazione di una compagnia di assicurazioni. In particolare, è stato utilizzato un approccio a tempi discreti per la descrizione dell'evoluzione delle probabilità di passaggio tra i vari stati gestionali fino al completo esaurimento della vita di un sinistro. Per la stima degli importi dei sinistri con una riserva case accantonata alla data di valutazione è stato utilizzato un criterio basato sullo studio del rapporto pagato su riservato case iniziale al fine di stimare l'importo dei pagamenti futuri. Nell'applicazione del modello si è anche tenuto conto del rischio di parametro introdotto nelle simulazioni con l'utilizzo della tecnica del bootstrapping sia per il processo dei numeri che per gli importi. I risultati ottenuti mostrano una ridotta variabilità delle stime confrontata con la principale modellistica Macro-Level e, rispetto al modello ODP, una più marcata asimmetria tipica della variabile riserva sinistri. Per quanto riguarda le stime di riserva i risultati mostrano per le generazioni più giovani valori prossimi a quelli ottenuti con i metodi

basati sull'*incurred* mentre nel complesso valori prossimi ai metodi basati sul pagato. Infine in merito all'aggregazione della variabilità dei modelli è stato mostrato un possibile approccio esemplificativo che evidenzia come utilizzando una pluralità di metodi la variabilità totale aumenta anche in funzione della variabilità tra le aspettative.

Il contenuto di questo lavoro può essere sviluppato ed esteso in molteplici direzioni a partire dallo studio della dipendenza tra le distribuzioni del tempo tra un passaggio di stato e il successivo e l'analisi della dipendenza tra il rapporto pagato su riservato e le variabili temporali relative allo stato del sinistro e l'importo della riserva case.

Bibliografia

[Arjas 1989]: E. Arjas, The claims reserving problem in non-life insurance: some structural ideas. *ASTIN Bulletin*, 19(2):139–152, 1989.

[England Verrall 2002]: P.D. England and R.J. Verrall. Stochastic claims reserving in general insurance. *British Actuarial Journal*, 8:443–544, 2002.

[Haastrup Arjas 1996]: S. Haastrup and E. Arjas. Claims reserving in continuous time: a nonparametric Bayesian approach. *ASTIN Bulletin*, 26(2):139–164, 1996.

[Kunkler 2004]: M. Kunkler. Modelling zeros in stochastic reserving models. *Insurance: Mathematics and Economics*, 34(1):23–35, 2004.

[Larsen 2007]: C.R. Larsen. An individual claims reserving model. *ASTIN Bulletin*, 37(1):113–132, 2007.

[Merz Wüthrich 2010]: M. Merz and M. Wüthrich. Paid-incurred chain claims reserving method. *Insurance: Mathematics and Economics*, 3:568–579, 2010.

[Matsumoto Nishimura 1998] Makato Matsumoto e Takuji Nishimura, Mersenne Twister: A 623-dimensionally equidistributed uniform pseudorandom number generator, *ACM Transactions on Modeling and Computer Simulations: Special Issue on Uniform Random Number Generation*, 1998

[Norberg 1993]: R. Norberg. Prediction of outstanding liabilities in non-life insurance. *ASTIN Bulletin*, 23(1):95–115, 1993.

[Norberg 1999]: R. Norberg. Prediction of outstanding liabilities II. Model extensions variations and extensions. *ASTIN Bulletin*, 29(1):5–25, 1999.

[Quarg Mack 2008]: G. Quarg and T. Mack. Munich chain ladder: a reserving method that reduces the gap between IBNR projections based on paid losses and IBNR projections based on incurred losses. *Variance*, 2:266–299, 2008.

[Schnieper 1991]: R. Schnieper. Separating true IBNR and IBNER claims. *ASTIN Bulletin*, 21(1):111–127, 1991.

[Taylor 2008]: G. Taylor, G. McGuire, and J. Sullivan. Individual claim loss reserving conditioned by case estimates. *Annals of Actuarial Science*, 3(1-2):215–256, 2008.

[Merz Wüthrich 2008]: Mario V. Wüthrich and Michael Merz. *Stochastic claims reserving methods in insurance*. Wiley Finance, 2008.

[Zhao Zhou 2010]: X. B. Zhao and X. Zhou. Applying copula models to individual claim loss reserving methods. *Insurance: Mathematics and Economics*, 46(2):290–299, 2010.

[Zhao Zhou 2009]: X. B. Zhao, X. Zhou, and J. L. Wang. Semiparametric model for prediction of individual claim loss reserving. *Insurance: Mathematics and Economics*, 45(1):1–8, 2009.

[Wiser 1990]: Ronald Wiser, *Loss Reserving, Foundations of the Casualty Actuarial Science (First Edition)*, CAS Society, 1990, Chapter 3

[Savelli 2011]: N. Savelli, G.P. Clemente: Stochastic Claim Reserving based on CRM for Solvency II purposes, 40 th ASTIN International Colloquium, 19-22 June 2011, Madrid.

[Savelli 2010]: N. Savelli, G.P. Clemente: A Collective Risk Model for Outstanding Claims Reserve Distribution, in *Transactions International Congress of Actuaries (ICA)*, 7-12 March 2010, Cape Town, South Africa.

[Savelli 2014]: G.P. Clemente, N. Savelli, D. Zappa: Modelling Premium Risk for Solvency II: from empirical data to risk capital evaluation, International Congress of Actuaries, March 2014, Washington

[Verrall Wüthrich 2016]: R. J. Verrall and Mario Wüthrich, Understanding Reporting Delay in General Insurance, Montserrat Guillén, Risk, 2016

[Dahms 2008]: René Dahms, A Loss Reserving Method for Incomplete Claim Data, 2008, ASTIN Colloquia, Manchester

[Jin 2013]: Xiaoli Jin, Micro-Level Loss Reserving Models with Applications in Workers Compensation Insurance, University of Wisconsin-Madison, Empirical Paper. 2013

[Bornhuetter Ferguson 1972]: Bornhuetter, R., Ferguson, R., 1972. The actuary and insurer. Proceedings of the Casualty Actuarial Society 59.

[Mack 1993]: Mack, T., 1993. Distribution-free calculation of the standard error of chain ladder reserve estimates. Astin Bulletin 23 (02), 213–225.

[Fisher Lange 1974]: Fisher and Lange, Loss Reserve Testing: A Report Year Approach, CAS Proceedings, 1974

[Ottaviani 1983]: Riccardo Ottaviani, Metodologie ed analisi statistiche nel settore delle assicurazioni, Convegno SIS, Trieste, 1983.

[Jewell 1989]: Jewell, W.S. Predicting IBNYR events and delays I. Continuous time. ASTIN Bull., 1989, 19, 25–55.

[Jewell 1990]: Jewell, W.S. Predicting IBNYR events and delays II. Discrete time. ASTIN Bull., 1990, 20, 93–111.

[EIOPA 2014]: Guidelines on the valuation of technical provisions, EIOPA-BoS-14/166 EN, recepita dalla normativa italiana con Regolamento IVASS n. 18.

[Reg. 22]: Regolamento ISVAP n. 22 così come modificato dal Provvedimento IVASS n.53 del 6 dicembre 2016

[CARD 2006]: Convenzione tra Assicuratori per il Risarcimento Diretto in attuazione dell'art.13 del Decreto del Presidente della Repubblica del 18 luglio 2006, n. 254

[ChainLadder 2017]: Markus Gesmann, Daniel Murphy, Yanwei (Wayne) Zhang, Alessandro Carrato, Giuseppe Crupi, Mario Wuthrich and Fabio Concina (2017). ChainLadder: Statistical Methods and Models for Claims Reserving in General Insurance. R package version 0.2.4. <https://CRAN.R-project.org/package=ChainLadder>

[R Core Team 2016]: R Core Team (2016) R: A language and environment for statistical computing. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. URL <https://www.R-project.org/>.

[fitdistrplus 2015]: Marie Laure Delignette-Muller, Christophe Dutang (2015). fitdistrplus: An R Package for Fitting Distributions. Journal of Statistical Software, 64(4), 1-34. URL <http://www.jstatsoft.org/v64/i04/>.

[Antonio Pigeon 2014]: M. Pigeon, K. Antonio & M. Denuit. 2014. Individual loss reserving using paid-incurred data. Insurance: Mathematics and Economics, 58, 121-131.

[Antonio Plat 2014]: K. Antonio & H.J. Plat. 2014. Micro-level stochastic loss reserving in general insurance. Scandinavian Actuarial Journal, 7, 649-669.

[Badescu 2016a]: A. L. Badescu, X. Sheldon Lin, Dameng Tang. A Marked Cox Model for the Number of IBNR Claims: Theory. Insurance: Mathematics and Economics Volume 69, July 2016, Pages 29-37

[Badescu 2016b]: Badescu, Andrei and Lin, X. Sheldon and Tang, Dameng, A Marked Cox Model for the Number of IBNR Claims: Estimation and Application (March 14, 2016).

[Cullen and Frey 1999]: Cullen AC and Frey HC (1999), *Probabilistic techniques in exposure assessment*. Plenum Press, USA, pp. 81-155.

[Friedland 2010]: Jacqueline Friedland, Estimating Unpaid Claims Using Basic Techniques, Casualty Actuarial Society, Version 3, 2010.

[Verdonck 2009]: Verdonck, T., Van Wouwe, M., & Dhaene, J. (2009). A robustification of the chainladder method. *North American Actuarial Journal*, 13(2), 280-298.

Appendice A

Parametri relativi alle probabilità di passaggio di stato e alla distribuzione temporale del passaggio:

Parametri per il passaggio di Stato tra E1 e E2

(%)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	Prob.
PP, PP	85,75	8,98	3,05	1,28	0,53	0,08	0,07	0,11	0,15	0,00	0,00	11,73
PP, PT	90,73	5,94	2,03	0,74	0,28	0,13	0,06	0,07	0,02	0,00	0,00	63,97
PP, SS	80,66	13,06	3,67	1,37	0,52	0,28	0,31	0,13	0,00	0,00	0,00	24,30
PT, PP	84,73	9,67	3,40	1,22	0,52	0,00	0,47	0,00	0,00	0,00	0,00	0,10
PT, PT	82,53	11,70	3,02	1,48	0,68	0,27	0,16	0,11	0,04	0,00	0,00	3,14
PT, R	67,55	18,63	6,62	3,83	1,15	0,71	0,48	0,37	0,00	0,65	0,00	0,39
SS, PP	84,05	10,65	2,98	1,07	0,86	0,00	0,39	0,00	0,00	0,00	0,00	0,54
SS, PT	79,67	12,54	4,01	1,82	0,86	0,67	0,16	0,12	0,00	0,14	0,00	7,43
SS, R	67,15	18,67	6,99	4,00	1,77	1,02	0,21	0,19	0,00	0,00	0,00	2,75

Parametri per il passaggio di Stato tra E2 e E3

(%)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Prob.
PP, PP	65,33	19,51	6,58	3,96	1,58	1,05	0,37	0,64	0,98	0,00	15,09
PP, PT	68,74	16,67	7,89	2,97	1,26	1,01	0,10	0,42	0,94	0,00	52,38
PP, SS	72,60	15,77	6,64	2,62	1,17	0,64	0,55	0,00	0,00	0,00	32,54
PT, PP	66,04	18,11	8,18	2,76	0,00	2,21	2,70	0,00	0,00	0,00	0,15
PT, PT	66,74	16,09	8,37	3,77	2,07	1,27	0,65	0,47	0,57	0,00	4,53
PT, R	64,17	21,20	6,97	3,86	2,35	0,85	0,60	0,00	0,00	0,00	0,75
SS, PP	56,63	14,61	9,89	0,00	3,86	5,00	0,00	0,00	0,00	10,00	0,41
SS, PT	67,92	17,97	7,55	3,45	1,15	0,55	0,66	0,00	0,76	0,00	6,76
SS, R	65,24	17,70	9,59	3,66	1,38	0,97	1,47	0,00	0,00	0,00	1,92

Parametri per il passaggio di Stato tra E3 e E4 (e per gli stati successivi)

(%)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Prob.
{PP-R} , PP	47,82	18,37	7,73	10,76	3,06	8,92	3,33	0,00	0,00	15,06
{PP-R} , PT	55,30	20,75	10,03	5,10	3,31	2,19	2,12	1,20	0,00	49,15
{PP-R} , SS	65,14	14,62	9,69	5,01	3,76	0,59	1,19	0,00	0,00	35,79
{PT-SS} , PP	80,81	8,08	11,11	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,11
{PT-SS} , PT	54,28	19,75	11,28	6,32	3,11	1,81	1,28	2,17	0,00	5,19
{PT-SS} , R	59,89	15,74	9,93	3,37	3,82	2,81	4,44	0,00	0,00	2,27

Appendice B

Parametri relativi alle distribuzioni dell'importo dei pagamenti degli IBNR per tipologia di stato di appartenenza:

$$E^2 = pt \mid E^1 = pp, \Delta V^2 = 1, \Delta U \geq 1$$

	Stima	Mediana	2,50%	97,50%
μ	7,7921	7,7910	7,7231	7,8601
σ	1,1594	1,1585	1,1099	1,2073
Media	4.742	4.732	4.184	5.372
Std. Dev	7.984	7.957	6.520	9.752

$$E^2 = pt \mid E^1 = pp, \Delta V^2 \geq 2, \Delta U \geq 1$$

	Stima	Mediana	2,50%	97,50%
μ	8,4090	8,4099	8,2635	8,5558
σ	1,1155	1,1109	1,0095	1,2139
Media	8.359	8.324	6.458	10.858
Std. Dev	13.139	12.990	8.593	19.917

$$E^2 = pp \mid E^1 = pp, \Delta U \geq 1$$

	Stima	Mediana	2,50%	97,50%
μ	8,0254	8,0241	7,8469	8,2063
σ	1,4083	1,4042	1,2782	1,5354
Media	8.243	8.184	5.790	11.909
Std. Dev	20.634	20.349	11.756	36.829

$$E^2 = \{pt, pp\} \mid E^1 = ss, \Delta U \geq 1$$

	Stima	Mediana	2,50%	97,50%
μ	7,3734	7,3735	7,2854	7,4625
σ	1,0342	1,0327	0,9708	1,0956
Media	2.719	2.715	2.337	3.174
Std. Dev	3.762	3.748	2.925	4.835

$$E^2 = \{pt, pp\} \mid E^1 = pt, \Delta U \geq 1$$

	Stima	Mediana	2,50%	97,50%
μ	6,8265	6,8261	6,7289	6,9230
σ	1,2568	1,2554	1,1881	1,3252
Media	2.031	2.027	1.694	2.443
Std. Dev	3.986	3.969	2.984	5.348

$$E^3 = \{pt, pp\} \mid \Delta U \geq 1$$

	Stima	Mediana	2,50%	97,50%
μ	7,9303	7,9296	7,8256	8,0326
σ	1,1726	1,1707	1,0984	1,2432
Media	5.529	5.513	4.577	6.670
Std. Dev	9.504	9.449	7.004	12.813

$$E^{\geq 4} = \{pt, pp\} \mid \Delta U \geq 1$$

	Stima	Mediana	2,50%	97,50%
μ	8,2495	8,2540	7,8086	8,7050
σ	1,5961	1,5711	1,2657	1,9011
Media	13.674	13.202	5.484	36.760
Std. Dev	46.927	43.391	10.916	220.935

Parametri relativi alle distribuzioni dell'importo dei pagamenti delle riaperture e dei sinistri il cui stato precedente è stato simulato nella routine, per tipologia di stato di appartenenza:

$$E^2 = pp \mid E^1 = pp, \Delta V^2 = 1$$

	Stima	Mediana	2,50%	97,50%
μ	7,9861	7,9860	7,9581	8,0141
σ	1,3427	1,3427	1,3230	1,3626
Media	7.241	7.241	6.858	7.650
Std. Dev	16.299	16.299	14.958	17.782

$$E^2 = pt \mid E^1 = pt, \Delta V^2 = 2$$

	Stima	Mediana	2,50%	97,50%
μ	8,4012	8,4011	8,2912	8,5090
σ	1,5628	1,5623	1,4842	1,6383
Media	15.099	15.087	12.001	18.977
Std. Dev	48.927	48.849	34.054	70.096

$$E^2 = pt \mid E^1 = pt, \Delta V^2 = 3$$

	Stima	Mediana	2,50%	97,50%
μ	8,7072	8,7095	8,5184	8,8996
σ	1,5105	1,5036	1,3674	1,6381
Media	18.922	18.767	12.750	28.037
Std. Dev	56.108	55.002	29.862	103.529

$$E^2 = pt \mid E^1 = pt, \Delta V^2 \geq 4$$

	Stima	Mediana	2,50%	97,50%
μ	9,0772	9,0740	8,7606	9,3996
σ	1,7446	1,7315	1,5082	1,9613
Media	40.097	39.066	19.890	82.697
Std. Dev	179.241	170.490	58.751	559.878

$$E^2 = pt \mid E^1 = pp, \Delta V^2 = 1$$

	Stima	Mediana	2,50%	97,50%
μ	7,8416	7,8416	7,8318	7,8515
σ	1,1217	1,1217	1,1147	1,1287
Media	4.773	4.772	4.690	4.858
Std. Dev	7.575	7.574	7.362	7.796

$$E^2 = pt \mid E^1 = pp, \Delta V^2 = 2$$

	Stima	Mediana	2,50%	97,50%
μ	8,2906	8,2903	8,2473	8,3353
σ	1,2053	1,2048	1,1734	1,2353
Media	8.241	8.234	7.598	8.940
Std. Dev	14.913	14.888	13.077	16.962

$$E^2 = pt \mid E^1 = pp, \Delta V^2 = 3$$

	Stima	Mediana	2,50%	97,50%
μ	8,5562	8,5557	8,4789	8,6325
σ	1,1600	1,1590	1,1052	1,2138
Media	10.189	10.171	8.863	11.721
Std. Dev	17.172	17.115	13.708	21.496

$$E^2 = pt \mid E^1 = pp, \Delta V^2 \geq 4$$

	Stima	Mediana	2,50%	97,50%
μ	8,9996	9,0001	8,8746	9,1257
σ	1,2784	1,2759	1,1907	1,3647
Media	18.340	18.289	14.523	23.315
Std. Dev	37.254	36.999	25.685	54.376

$$E^2 = pp \mid E^1 = ss$$

	Stima	Mediana	2,50%	97,50%
μ	7,8863	7,8857	7,7954	7,9787
σ	1,3558	1,3541	1,2894	1,4179
Media	6.670	6.651	5.578	7.974
Std. Dev	15.335	15.247	11.531	20.277

$$E^2 = pp \mid E^1 = pt$$

	Stima	Mediana	2,50%	97,50%
μ	7,2986	7,2983	7,2127	7,3846
σ	1,1831	1,1813	1,1211	1,2421
Media	2.976	2.969	2.543	3.485
Std. Dev	5.202	5.174	4.033	6.683

$$E^3 = pt \mid \Delta V^3 = 1$$

	Stima	Mediana	2,50%	97,50%
μ	7,6423	7,6425	7,6152	7,6692
σ	1,2759	1,2759	1,2567	1,2948
Media	4.704	4.705	4.469	4.951
Std. Dev	9.517	9.519	8.771	10.322

$$E^3 = pt \mid \Delta V^3 = 2$$

	Stima	Mediana	2,50%	97,50%
μ	7,9534	7,9535	7,8970	8,0060
σ	1,2529	1,2528	1,2146	1,2908
Media	6.238	6.237	5.623	6.899
Std. Dev	12.169	12.166	10.326	14.294

$$E^3 = pt \mid \Delta V^3 = 3$$

	Stima	Mediana	2,50%	97,50%
μ	8,1221	8,1218	8,0288	8,2171
σ	1,3824	1,3811	1,3143	1,4472
Media	8.757	8.738	7.277	10.555
Std. Dev	21.016	20.925	15.651	28.165

$$E^3 = pt \mid \Delta V^3 \geq 4$$

	Stima	Mediana	2,50%	97,50%
μ	8,2803	8,2798	8,1422	8,4210
σ	1,5418	1,5400	1,4422	1,6388
Media	12.950	12.908	9.723	17.393
Std. Dev	40.484	40.233	25.732	64.298

$$E^3 = pp \mid \Delta V^3 = 1$$

	Stima	Mediana	2,50%	97,50%
μ	8,3767	8,3754	8,2880	8,4668
σ	1,6388	1,6377	1,5759	1,7011
Media	16.638	16.589	13.763	20.203
Std. Dev	61.505	61.210	45.613	83.441

$$E^3 = pp \mid \Delta V^3 = 2$$

	Stima	Mediana	2,50%	97,50%
μ	8,6946	8,6940	8,5338	8,8518
σ	1,5651	1,5621	1,4503	1,6756
Media	20.321	20.214	14.552	28.443
Std. Dev	66.113	65.428	39.030	112.239

$$E^3 = pp \mid \Delta V^3 \geq 3$$

	Stima	Mediana	2,50%	97,50%
μ	9,0028	9,0032	8,7390	9,2593
σ	1,8101	1,8024	1,6258	1,9879
Media	41.819	41.256	23.401	75.747
Std. Dev	211.107	205.287	84.558	541.079

$$E^{\geq 4} = \{pt, pp\} \mid \Delta V^{\geq 4} = 1$$

	Stima	Mediana	2,50%	97,50%
μ	7,9738	7,9733	7,8932	8,0528
σ	1,4122	1,4108	1,3541	1,4669
Media	7.871	7.852	6.701	9.217
Std. Dev	19.830	19.739	15.364	25.409

$$E^{\geq 4} = \{pt, pp\} \mid \Delta V^{\geq 4} = 2$$

	Stima	Mediana	2,50%	97,50%
μ	8,3090	8,3092	8,1582	8,4664
σ	1,5308	1,5270	1,4216	1,6391
Media	13.103	13.031	9.592	18.209
Std. Dev	40.205	39.729	24.543	67.347

$$E^{\geq 4} = \{pt, pp\} \mid \Delta V^{\geq 4} \geq 3$$

	Stima	Mediana	2,50%	97,50%
μ	8,7373	8,7371	8,5158	8,9575
σ	1,8562	1,8516	1,6920	2,0091
Media	34.890	34.587	20.894	58.433
Std. Dev	192.232	188.880	84.898	435.778